

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
-----------------------	---

Раздел I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 1. Дифференциальные уравнения и передаточные функций звеньев и автоматических систем	11
§ 1.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев	11
§ 1.2. Типовые динамические звенья	32
§ 1.3. Дифференциальные уравнения и передаточные функции автоматических систем	36
§ 1.4. Структурные схемы и их преобразование	46
Глава 2. Частотные характеристики динамических звеньев и систем автоматического регулирования	51
§ 2.1. Характеристики динамических звеньев	51
§ 2.2. Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых систем автоматического регулирования	63
§ 2.3. Вещественные частотные характеристики замкнутых систем автоматического регулирования	73
§ 2.4. Логарифмические характеристики систем автоматического регулирования	79
Глава 3. Устойчивость линейных систем	89
§ 3.1. Алгебраические критерии устойчивости	89
§ 3.2. Критерий устойчивости Михайлова	101
§ 3.3. Критерий устойчивости Найквиста	109
§ 3.4. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы	120
§ 3.5. Построение областей устойчивости	125
Глава 4. Построение переходных процессов в системах автоматического регулирования	130
§ 4.1. Классический метод решения дифференциальных уравнений	130
§ 4.2. Применение изображений Лапласа и Карсона—Хевисайда	140

§ 4.3. Приближенные методы расчета переходных процессов	158
А. Использование вещественных частотных характеристик	158
Б. Использование сопрягающих частот л. а. х.	165
В. Использование пормированных кривых для минимально-фазовых систем с типовыми л. а. х.	167
Г. Построение кривой переходного процесса графическим методом	172
Глава 5. Оценка качества регулирования	176
§ 5.1. Определение точности при наличии задающего воздействия	176
§ 5.2. Определение точности при наличии возмущающего воздействия	191
§ 5.3. Корневые методы оценки динамических свойств	194
§ 5.4. Оценка по кривой переходного процесса	198
§ 5.5. Интегральные оценки	201
§ 5.6. Частотные оценки динамических свойств	206
Глава 6. Синтез линейных систем	211
§ 6.1. Выбор параметров САР по требуемой точности	211
§ 6.2. Алгебраические методы выбора параметров САР	224
§ 6.3. Частотные методы выбора параметров САР. Расчет последовательных корректирующих устройств	231
§ 6.4. Расчет дополнительных обратных связей и прямых параллельных корректирующих связей	249
§ 6.5. Расчет систем комбинированного управления	263
§ 6.6. Расчет последовательных корректирующих контуров, работающих на несущей частоте	270
Глава 7. Случайные процессы в линейных системах	273
§ 7.1. Вычисление корреляционных функций и спектральных плотностей	273
§ 7.2. Прохождение случайного стационарного сигнала через линейную систему	286
§ 7.3. Оптимальные системы	295
Глава 8. Системы с переменными параметрами	302
§ 8.1. Построение переходных процессов	302
§ 8.2. Оценка устойчивости и качества регулирования	309
Глава 9. Системы с запаздыванием и с распределенными параметрами	314
§ 9.1. Системы с временным запаздыванием	314
§ 9.2. Системы с распределенными параметрами	321
Глава 10. Импульсные системы	324
§ 10.1. Дискретные функции и уравнения импульсных систем	324
§ 10.2. Устойчивость и качество импульсных систем	336

Раздел II

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 11. Составление уравнений нелинейных систем . . .	343
§ 11.1. Уравнения нелинейных следящих систем	343
§ 11.2. Уравнения нелинейных систем стабилизации	350
Глава 12. Точные методы исследования устойчивости и автоколебаний	356
§ 12.1. Метод фазовых траекторий	356
§ 12.2. Метод А. М. Ляпунова — А. И. Лурье	369
§ 12.3. Частотный метод В. М. Попова	374
§ 12.4. Метод припасовывания	378
Глава 13. Приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний	383
§ 13.1. Алгебраические способы определения устойчивости и автоколебаний	383
§ 13.2. Частотный метод определения автоколебаний	392
Глава 14. Оценка качества нелинейных систем	402
§ 14.1. Исследование колебательных переходных процессов аналитическими методами	402
§ 14.2. Исследование колебательных переходных процессов частотными методами	412
Глава 15. Вынужденные колебания в нелинейных системах	417
§ 15.1. Отыскание симметричных одночастотных вынужденных колебаний графическим методом	417
§ 15.2. Отыскание симметричных одночастотных вынужденных колебаний частотным методом	423
Глава 16. Прохождение случайных процессов через нелинейные системы	431
§ 16.1. Определение функций и моментов распределения случайного процесса на выходе нелинейной системы	431
§ 16.2. Расчет нелинейных систем с помощью статистической линеаризации	438

Раздел III

ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЦИФРОВЫЕ, САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Глава 17. Синтез оптимальных систем управления	448
§ 17.1. Синтез оптимальных систем с использованием принципа максимума	448
§ 17.2. Синтез оптимальных систем методом динамического программирования и классического вариационного исчисления	455

Глава 18. Системы с цифровыми вычислительными машинами (ЦВМ)	460
§ 18.1. Передаточные функции систем с ЦВМ при учете квантования по времени	460
§ 18.2. Устойчивость и оценка качества	466
§ 18.3. Синтез систем с ЦВМ	471
Глава 19. Экстремальные и самонастраивающиеся системы	480
§ 19.1. Составление структурных схем экстремальных и самонастраивающихся систем и исследование их устойчивости	480
§ 19.2. Качество систем экстремального управления	489
Глава 20. Составление схем для моделирования автоматических систем на непрерывных вычислительных машинах	499
§ 20.1. Составление схем для моделирования элементов автоматических систем на электронных вычислительных машинах	499
§ 20.2. Составление схем для моделирования дифференциальных уравнений и автоматических систем на электронных вычислительных машинах	513
Приложение	522
1. Изображения по Лапласу и Карсону—Хевисайду функций времени	522
2. Z-преобразования функций времени	524
3. Нормированная логарифмическая частотная фазовая характеристика апериодического звена первого порядка	525
4. Нормированные логарифмические амплитудная и фазовая характеристики колебательного звена	525
5. Отклонение асимптотической л. а. х. колебательного звена от точной	526
6. Критерий устойчивости Гурвица	527
7. Диаграмма Вышнеградского с линиями равного затухания в процентах за один период	528
8. Диаграмма Вышнеградского с линиями равной нормированной степени устойчивости $h_0 = h \sqrt[3]{a_0/a_3}$	529
9. Эквивалентные начальные условия в системе регулирования после воздействия на нее единичной ступенчатой функции	529
10. Решения однородных дифференциальных уравнений первого, второго и третьего порядков	530

11. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы (вещественная круговая диаграмма)	531
12. Кривые для определения времени переходного процесса и перерегулирования по коэффициенту наклона трапецидальной вещественной частотной характеристики . .	531
13. Кривые для определения времени переходного процесса и перерегулирования для вещественной частотной характеристики, имеющей максимум	532
14. Зависимость требуемого запаса по фазе от модуля в децибелах при различных показателях колебательности	532
15. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики по заданным качественным показателям	533
16. Нахождение квадратичной интегральной оценки	534
17. Формулы для интегрирования спектральной плотности	535
18. Нормированные стандартные передаточные функции разомкнутой системы	535
19. Типовые л. а. х., соответствующие заданному запасу устойчивости	538
20. Нормированные кривые переходных процессов для типовых л. а. х.	541
21. Корректирующие звенья постоянного тока	542
22. Корректирующее звено переменного тока (двойное Т-образное звено)	544
23. Приведение дифференциальных уравнений к канонической форме	547
24. Достаточные условия устойчивости нелинейных систем второго, третьего и четвертого порядков	550
25. Переход от л. а. х. вида $20 \lg 1 + W(j\omega) $ к л. а. х. вида $20 \lg W(j\omega) $	551
26. Типовые л. а. х. систем с ЦВМ при учете квантования по времени	551
27. Типовые последовательные дискретные корректирующие звенья	556
28. Коэффициенты гармонической линеаризации основных нелинейных характеристик	558
29. Нормированные амплитудно-фазовые частотные характеристики релейных исполнительных механизмов	562

30. Коэффициенты статистической линеаризации некоторых типовых нелинейностей	565
31. Нормированный интеграл плотности вероятности нормального закона распределения	571
32. Нормированная плотность вероятности нормального закона распределения	573
33. Моделирование элементов структурных схем автоматических систем на операционных усилителях	574
34. Моделирование нелинейных статических характеристик на операционных усилителях	579
35. Таблица функций $h(t_0)$	582
Л и т е р а т у р а	586

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Под редакцией
В. А. БЕСЕКЕРСКОГО

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1972

Авторы:

В. А. БЕСЕКЕРСКИЙ, А. Н. ГЕРАСИМОВ,
Л. Ф. ПОРФИРЬЕВ, Е. А. ФАБРИКАНТ,
С. М. ФЕДОРОВ, В. И. ЦВЕТКОВ.

Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления, под редакцией В. А. Бесекерского, издание четвертое, стереотипное, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1972.

Сборник рассчитан на студентов, специализирующихся в области теории автоматического регулирования и следящих систем, а также на студентов других специальностей, изучающих теорию автоматического регулирования и управления. Сборник, содержащий 491 задачу, ориентируется на ряд используемых в вузах книг. В качестве основной принята книга В. А. Бесекерского и Е. П. Попова «Теория систем автоматического регулирования». Построение сборника, содержание, терминология и методика изложения в основном соответствует этой книге.

Табл. 32. Илл. 376. Библ. 43 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник рассчитан на студентов, специализирующихся в области автоматического регулирования и управления, но может быть использован и студентами других специальностей при изучении ими теории автоматического регулирования.

Круг вопросов, охватываемых сборником, включает в себя темы, входящие, как правило, в программы по теории автоматического регулирования или теории автоматического управления многих вузов.

Сборник ориентируется на ряд используемых в вузах книг, список которых приведен в конце сборника. В качестве основной принята книга В. А. Бесекерского и Е. П. Попова «Теория систем автоматического регулирования», выходящая вторым изданием в 1972 г. Построение сборника, содержание, терминология и методика изложения в основном соответствуют этой книге.

Аналогично указанной книге в сборнике применяется одинаковый символ для обозначения оператора дифференцирования, используемого при операторной форме записи дифференциальных уравнений, в которые входят функции времени (оригиналы), и комплексной переменной в преобразованиях Лапласа и Карсона — Хевисайда. При этом предполагается, что читатель самостоятельно может разобраться в значении этого символа в зависимости от того, используются ли в уравнениях функции времени или их изображения, и знает правила перехода от оригиналов к изображениям с учетом начальных условий.

Сборник задач написан В. А. Бесекерским (главы 5, 7, 8 и 10), А. Н. Герасимовым (главы 3 и 9), С. В. Лучко (главы 11—15), Л. Ф. Порфирьевым (главы 16, 17 и 19), Е. А. Фабрикантом (главы 2 и 4), С. М. Федоровым (главы 6 и 18) и В. И. Цветковым (главы 1 и 20).

Авторы приносят благодарность А. В. Нетушилу и Б. П. Рязанову за полезные замечания, сделанные при просмотре рукописи третьего издания.

В четвертом издании исправлены замеченные опечатки и неточности.

Авторы

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ И АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев

1. Составить в общем виде дифференциальное уравнение электромагнита с пружиной и демпфером (рис. 1, а), если за входную величину принять напряжение u , а за выходную — перемещение якоря x и считать известными приведенные к точке А силы пружины F_n , демпфера F_d , электромагнита F_e и инерционную силу F_i . Влиянием сил сухого трения пренебречь. Решение. Выберем начало отсчета, как показано на рис. 1, а. Составим уравнение равновесия сил, приведенных к точке А,

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2x = F_e(i, x) \quad (1)$$

и уравнение равновесия напряжений

$$u = iR + L(\delta, i) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(\delta, i)}{dt}, \quad (2)$$

где $m\ddot{x} = F_i$ — инерционная сила, пропорциональная ускорению $\ddot{x}$ и приведенной массе подвижных частей m ; $c_1\dot{x} = F_d$ — сила демпфера, пропорциональная скорости $\dot{x}$ и коэффициенту демпфирования c_1 ; $c_2x = F_n$ — сила пружины, пропорциональная перемещению x и коэффициенту упругости или жесткости пружины c_2 ;

u , i — напряжение и ток обмотки электромагнита; $L = L(\delta, i)$ — индуктивность обмотки электромагнита, зависящая в общем виде от рабочего зазора δ и тока i (при насыщении магнитопровода); R — активное сопротивление обмотки электромагнита; $F_\delta = F_\delta(i, x)$ — сила электромагнита, являющаяся функцией двух переменных.

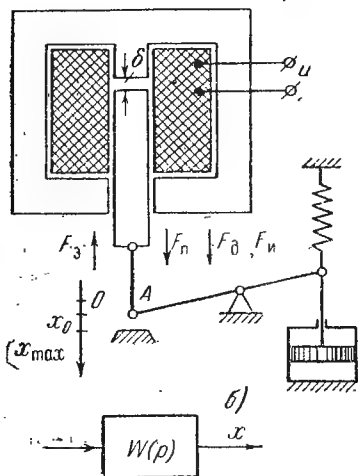


рис. 1. Электромагнит с пружиной и демпфером.

Предположим, что всегда остается рабочий зазор $\delta_0 \neq 0$ и такой, что справедливо соотношение

$$F_\delta(i, x) = c_3 i^2 x^{-2} \quad \text{при } \delta \geq \delta_0, \quad (3)$$

где c_3 — постоянный коэффициент. Наличие воздушного зазора ($\delta > \delta_0$) и рабочих (ограниченных) значений тока i исключает насыщение магнитопровода. Поэтому индуктивность не зависит от тока, а только от перемещения $L = L(x)$. На основании гипотезы малых отклонений будем считать, что $L = L_0 = \text{const}$ в

окрестности выбранного постоянного значения $x = x_0$. Тогда нелинейное уравнение (2) становится линейным:

$$u = iR + L_0 \frac{di}{dt}. \quad (4)$$

В уравнениях (1), (3) и (4) только член в правой части уравнения (1) или его выражение (3) являются нелинейными. Линеаризуем его, для чего запишем в виде

$$F(F_\delta, i, x) = F_\delta - c_3 i^2 x^{-2} = 0. \quad (5)$$

Тогда линеаризованное уравнение в малых отклонениях относительно установившегося статического значения

переменных ($i = i_0$, $x = x_0$, $F_9 = F_{90}$) примет вид

$$\left(\frac{\partial F_9}{\partial i}\right)^0 \Delta i + \left(\frac{\partial F_9}{\partial x}\right)^0 \Delta x = 0. \quad (6)$$

Найдя частные производные $\frac{\partial F_9}{\partial i}$, $\frac{\partial F_9}{\partial x}$ из (5) и подставив в них установившиеся значения переменных, получим

$$\Delta F_9 - k_1 \Delta i + k_2 \Delta x = 0 \quad \text{или} \quad \Delta F_9 = k_1 \Delta i - k_2 \Delta x, \quad (7)$$

где $k_1 = 2c_3 i_0 x_0^{-2}$, $k_2 = 2c_3 i_0^2 x_0^{-3}$. Знак минус в (7) означает, что при увеличении Δx сила ΔF_9 уменьшается. Коэффициенты передачи k_1 и k_2 можно найти графически из статических характеристик $F_9 = c_3 x_0^{-2} \cdot i^2$ и $F_9 = c_3 i_0^2 \cdot x^{-2}$ нахождением тангенса угла наклона касательных, проведенных в точках (i_0, F_{90}) и (x_0, F_{90}) соответственно.

Выразив Δi из (7) и подставив в (4), а полученный результат, разрешенный относительно ΔF_9 , — в (1) и сделав преобразования, получим

$$(T_9 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x(t) = ku(t),$$

где $T_9 = \frac{L_0}{R}$ — постоянная времени обмотки электромагнита,

$$T_1 = \frac{c_1}{c_2 + k_2}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2 + k_2}}, \quad k = \frac{k_1}{R(c_2 + k_2)}, \quad p = \frac{d}{dt}$$

— оператор или символ дифференцирования.

2. Найти передаточную функцию гидравлического исполнительного устройства (рис. 2, а), применявшегося совместно с центробежными измерителями угловой скорости ЦИС для регулирования скорости вращения тепловых двигателей. За входную величину принять перемещение x муфты ЦИС 3, а за выходную — перемещение y заслонки или регулирующего органа (РО) теплового двигателя (рис. 2, б).

Решение. Гидравлический двигатель (золотник 2 с силовым поршнем 1) вместе с изодромом (пружина 5 с демпфером 6) могут находиться в покое только при одном определенном положении рычага 4, когда пружина

находится в ненапряженном состоянии и золотник 2 — в среднем положении (как показано на рис. 2). При этом муфта 3 ЦИС занимает положение, соответствующее заданной угловой скорости Ω . При отклонении Ω от заданной муфта 3 сдвинется, сместит золотник 2 и вся система придет в движение, до тех пор, пока скорость Ω вновь не станет заданной.

1. *Уравнение гидравлического двигателя.* Усилия, развиваемые силовым поршнем, значительно превосходят силы сопротивления и инерционные силы, поэтому их влиянием можно пренебречь. Тогда, если не учитывать сжимаемость жидкости и считать, что площадь окна, открываемого золотником, пропорциональна его перемещению z , уравнение гидродвигателя будет

$$\frac{dy}{dt} = k_1 z \quad \text{или} \quad py = k_1 z, \quad (1)$$

б) где k_1 — коэффициент передачи.

2. *Уравнение рычага, связанного с муфтой, изодромом и золотником.* Перемещение муфты x

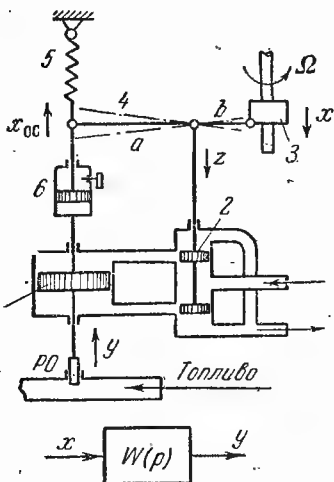
Рис. 2. Гидравлическое исполнительное устройство.

вызывает перемещение золотника z и силового поршня, который перемещает поршень демпфера x_{oc} в сторону, обратную перемещению муфты. Следовательно, имеем уравнение

$$z = k_2(x - k_3 x_{oc}), \quad (2)$$

где $k_2 = \frac{a}{a+b}$, $k_3 = \frac{b}{a}$ — коэффициенты передачи; a , b — длины плеч рычага (см. рис. 2).

3. *Уравнение цепи обратной связи.* В цепь обратной связи входит демпфер, пружина и рычаг 4. Составим



уравнение равновесия сил

$$c_1 \dot{x}_{oc} + c_2 x_{oc} = c_3 \dot{y}, \quad (3)$$

где $c_1 \dot{x}_{oc} = F_d$ — сила демпфера, пропорциональная скорости перемещения поршня демпфера $\dot{x}_{oc}$; $c_2 x_{oc} = F_n$ — сила пружины; $c_3 \dot{y} = F_c$ — сила, развиваемая силовым поршнем; c_1, c_2, c_3 — постоянные коэффициенты.

После преобразования уравнения (3) получим

$$(T_{oc} p + 1) x_{oc} = k_4 p y. \quad (4)$$

где $T_{oc} = \frac{c_1}{c_2}$ — постоянная времени цепи обратной связи,

$k_4 = \frac{c_3}{c_2}$ — коэффициент передачи.

Найдя x_{oc} из (2) и подставив в его выражение z из (1), получим

$$x_{oc} = \frac{k_2}{k_3} x - \frac{1}{k_1 k_3} p y. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), найдем дифференциальное уравнение гидравлического исполнительного устройства

$$(T \bar{p} + 1) p y(t) = k (T_{oc} p + 1) x(t), \quad (6)$$

где

$$T = \frac{T_{oc}}{1 + k_1 k_3 k_4}, \quad k = \frac{k_1 k_2}{1 + k_1 k_3 k_4}, \quad (7)$$

откуда искомая передаточная функция

$$W(p) = \frac{k (T_{oc} p + 1)}{p (T p + 1)}.$$

3. Найти передаточную функцию и дифференциальное уравнение пассивной электрической цепи (рис. 3) относительно напряжений u_1 и u_2 .

Решение. Для нахождения передаточных функций электрических цепей, подобных изображенной на рис. 3, удобно пользоваться операторной формой записи сопротивлений: индуктивного — pL , емкостного — $\frac{1}{pC}$ и активного — R , где $p = \frac{d}{dt}$ — символ или оператор дифференцирования.

Преобразуем электрическую цепь рис. 3 в эквивалентную ей (рис. 4), где

$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{pC_1} \cdot R_1}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} + pL_1 = \frac{R_1(T_1^2 p^2 + T_{1L}p + 1)}{T_{1C}p + 1}, \quad (1)$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2 L_2 p}{R_2 + L_2 p} + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_2(T_2^2 p^2 + T_{2L}p + 1)}{p(T_{2C} + T_2^2 p)}, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \sqrt{C_1 L_1}, & T_{1L} &= \frac{L_1}{R_1}, & T_{1C} &= R_1 C_1, \\ T_2 &= \sqrt{C_2 L_2}, & T_{2L} &= \frac{L_2}{R_2}, & T_{2C} &= R_2 C_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Размерность всех постоянных времен (3) $[T] = \text{сек.}$ Так как падение напряжения на последовательно соединенных сопротивлениях пропорционально величине

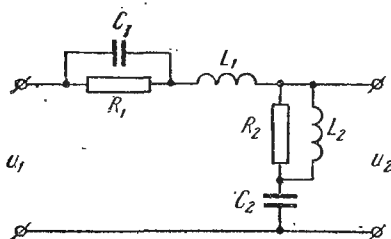


Рис. 3. Схема к задаче 3.

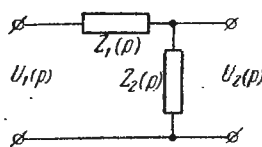


Рис. 4. Эквивалентная схема.

сопротивлений, то передаточная функция эквивалентной цепочки (рис. 4) находится как отношение

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{\text{ВЫХ}}(p)}{Z_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (4)$$

Подставив (1), (2) в (4), получим искомую передаточную функцию электрической цепи

$$W(p) = \frac{R_2(b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3)}{R_2(b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3) + R_1(d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p)}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= T_2^2 T_{1C}, & b_1 &= T_2^2 + T_{2L} T_{1C}, & b_2 &= T_{2L} + T_{1C}, & b_3 &= 1, \\ d_0 &= T_1^2 T_2^2, & d_1 &= T_1^2 T_{2C} + T_2^2 T_{1L}, & d_2 &= T_{1L} T_{2C} + T_2^2, & d_3 &= T_{2C}. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой электрической цепи относительно напряжений имеет вид

$$[R_2(b_0 p^3 + \dots + b_3) + R_1(d_0 p^4 + \dots + d_3 p)] u_2(t) = R_2(b_0 p^3 + \dots + b_3) u_1(t). \quad (6)$$

4. Составить дифференциальное уравнение и найти передаточную функцию трансформатора (рис. 5) относительно напряжений u_1 и u_2 . Электрические параметры трансформатора приведены на рис. 5.

Решение. Дифференциальные уравнения равновесия напряжений цепей первичной и вторичной обмоток трансформатора имеют вид

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 p i_1 + M p i_2, \quad (1)$$

$$0 = r_2 i_2 + L_2 p i_2 + M p i_1 + u_2, \quad (2)$$

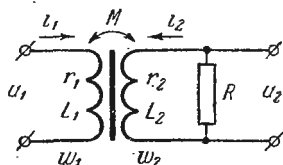


Рис. 5. Схема трансформатора к задаче 4.

где r_1 , L_1 , i_1 — сопротивление, индуктивность и ток первичной обмотки; r_2 , L_2 , i_2 — то же для вторичной обмотки; R — сопротивление нагрузки; u_1 , u_2 — входное и выходное напряжения трансформатора; M — коэффициент взаимной индукции обмоток.

Найдя выражение для тока i_1 из уравнения (1) и подставив в (2), получим дифференциальное уравнение трансформатора

$$\left[\frac{L_1 L_2 - M^2}{r_1 (R + r_2)} p^2 + \frac{L_2 r_1 + L_1 (R + r_2)}{r_1 (R + r_2)} p + 1 \right] u_2(t) = - \frac{MR}{r_1 (R + r_2)} p u_1(t), \quad (3)$$

или

$$[(T_1 T_2 - T_3^2) p^2 + (T_1 + T_2) p + 1] u_2(t) = -k \tau_1 p u_1(t), \quad (4)$$

где $T_1 = \frac{L_1}{r_1}$, $T_2 = \frac{L_2}{R + r_2}$, $\tau_1 = \frac{M}{r_1}$, $T_3 = \sqrt{\frac{M^2}{r_1 (R + r_2)}}$, $k = \frac{R}{R + r_2}$.

Размерность коэффициента τ_1 и всех постоянных времени $[T_i] = \text{сек}$ ($i = 1, 2, 3$). Так как коэффициент связи $M/\sqrt{L_1 L_2}$ в трансформаторе со стальным сердечником

близок к единице, то $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$, а $L_1 L_2 - M^2 \approx 0$ или $T_1 T_2 - T_3^2 \approx 0$. Тогда уравнение трансформатора (4) упростится

$$[(T_1 + T_2)p + 1] u_2(t) = -k\tau_1 p u_1(t). \quad (5)$$

Для режима холостого хода ($R = \infty$, $T_2 = 0$) имеем

$$(T_1 p + 1) u_2(t) = -\tau_1 p u_1(t).$$

На основании дифференциального уравнения (5) можно записать передаточную функцию трансформатора по напряжению,

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{k\tau_1 p}{(T_1 + T_2)p + 1},$$

из которой видно, что трансформатор является инерционным дифференцирующим звеном. Знак минус в дифференциальных уравнениях трансформатора означает, что фаза выходного напряжения изменяется на 180° относительно входного.

5. Составить дифференциальное уравнение трансформатора (рис. 5), если входной величиной является ток i_1 , а выходной — напряжение u_2 .

Решение. Запишем дифференциальное уравнение (1) задачи 4 в виде

$$u_1 = r_1 i_1 (1 + T_1 p) + M p \frac{u_2}{R}. \quad (1)$$

Подставив u_1 из (1) в уравнение (4) задачи 4 и сделав преобразования, получим

$$(T_2 p + 1) u_2(t) = -k M p i_1(t), \quad (2)$$

где коэффициенты T_2 , k , M соответствуют обозначениям задачи 4.

Для режима холостого хода ($R = \infty$, $T_2 = 0$, $k = 1$) имеем

$$u_2(t) = -M p i_1(t), \quad (3)$$

откуда видно, что в режиме холостого хода трансформатор представляет собой идеальное дифференцирующее звено, если входной величиной является ток, а выходной — напряжение.

6. Найти дифференциальное уравнение и передаточную функцию относительно напряжений u_1 и u_2 пассивной электрической цепи RC в виде моста (рис. 6).

Решение. Токи плеч моста (см. решение задачи 3)

$$i_1 = \frac{u_1 C_1 p}{T_1 p + 1}, \quad i_2 = \frac{u_1 C_2 p}{T_2 p + 1},$$

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{1}{C_2 p} i_2(t) - R_1 i_1(t) = \\ &= \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} u_1(t), \end{aligned}$$

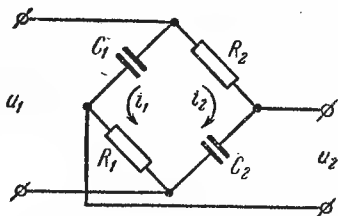


Рис. 6. Мостовая схема к задаче 6.

откуда искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) u_2(t) = (1 - \tau_1^2 p^2) u_1(t) \quad (1)$$

и передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{1 - \tau_1^2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (2)$$

где $\tau_1^2 = T_1 T_2$.

7. Найти передаточную функцию электрического моста (рис. 6), если сопротивление резисторов $R_1 = R_2$ и емкость конденсаторов $C_1 = C_2$.

Решение. При равенстве сопротивлений и емкостей противоположных плеч моста (рис. 6) постоянная времени $T_1 = T_2 = T$ и передаточная функция (2) задачи 6 принимает вид

$$W(p) = \frac{1 - T^2 p^2}{(1 + T p)^2} = \frac{1 - T p}{1 + T p}.$$

8. Найти передаточную функцию гидравлического демпфера (рис. 7), если пренебречь влиянием массы подвижных частей и принять за входную величину силу F , а за выходную — перемещение поршня x .

Решение. Приложенной силе F будет противостоять демпфирующая сила $F_d = c_1 \dot{x}$, где c_1 — коэффициент

демпфирования, пропорциональный вязкости жидкости и площади поршня и обратно пропорциональный площади пропускного отверстия.

Тогда имеем $px = kF$, где $k = c_1^{-1}$, и $W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{k}{p}$.

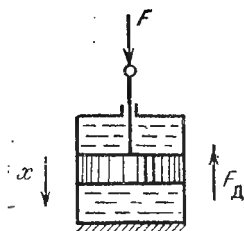


Рис. 7. Поршень с цилиндром (демпфер).

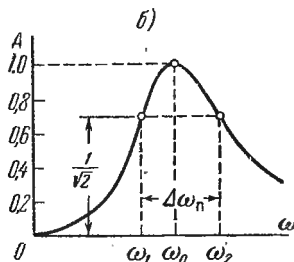
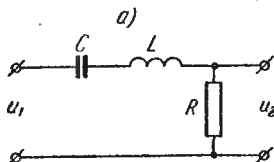


Рис. 8. Схема и график к задаче 10.

9. Найти передаточную функцию по условиям предыдущей задачи, если учесть массу подвижных частей.

Ответ.

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad T = \frac{m}{c_1},$$

m — масса подвижных частей.

10. Найти передаточную функцию электрической цепи (рис. 8, а) по огибающей модулированного сигнала с несущей частотой $\omega_c = 2\pi f_c$, где f_c — частота сети.

Решение. На основании формулы (4) задачи 3 передаточная функция электрической цепи (см. рис. 8, а)

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Tp}{T_0^2 p^2 + Tp + 1}, \quad T = RC, \quad T_0^2 = LC. \quad (1)$$

Амплитудная частотная характеристика (а. ч. х.) имеет вид

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{T\omega}{\sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T^2 \omega^2}}. \quad (2)$$

Анализ зависимости (2) показывает, что график а. ч. х. электрической цепи рис. 8, а имеет вид, изображенный на рис. 8, б, причем при резонансной частоте $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T_0}$, а. ч. х. принимает максимальное значение $A(\omega_0) = 1$, а при $0 \leq \omega < \omega_0$ и $\omega_0 < \omega \leq \infty$ $A(\omega) < 1$.

Амплитудная частотная характеристика на рис. 8, б напоминает а. ч. х. апериодического звена первого порядка с коэффициентом передачи $k = 1$ и $\omega_0 = 0$. Найдем условие, при котором а. ч. х. с достаточным приближением является симметричной относительно резонансной частоты ω_0 , т. е. может рассматриваться как а. ч. х. апериодического звена первого порядка относительно резонансной частоты ω_0 . Для этого найдем частоты ω_1 и ω_2 из условия идентичности подавления боковых частот апериодическим звеном первого порядка и электрической цепью (см. рис. 8, б):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Подставив (2) в (3), получим уравнение

$$\frac{T\omega}{\sqrt{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + T^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

решив которое, найдем выражения для боковых частот:

$$\omega_1 = \frac{-T + \sqrt{T^2 + 4T_0^2}}{2T_0^2}, \quad \omega_2 = \frac{T + \sqrt{T^2 + 4T_0^2}}{2T_0^2}. \quad (5)$$

Чтобы а. ч. х., изображенная на рис. 8, б, была симметричной относительно резонансной частоты $\omega_0 = T_0^{-1}$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{T^2}{4T_0^4}} \approx \omega_0. \quad (6)$$

Условие (6) выполняется при

$$\frac{T^2}{4T_0^4} < \frac{1}{T_0^2}, \quad \text{т. е. } T < 2T_0, \quad \text{или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7)$$

Следовательно, электрическую цепь (рис. 8, а) можно представить в виде апериодического звена первого

порядка по огибающей модулированного сигнала, если выполняется условие (7) и если несущая частота или частота сети $\omega_c = \omega_0$.

Для определения эквивалентной постоянной времени апериодического звена первого порядка по огибающей необходимо найти полосу пропускания рассматриваемой электрической цепи

$$\Delta\omega_{\Pi} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{T}{T_0^2} = \frac{R}{L}. \quad (8)$$

Эквивалентная постоянная времени

$$T_{\text{э}} = \frac{2}{\Delta\omega_{\Pi}} = 2 \frac{L}{R}. \quad (9)$$

Тогда при выполнении условия (7) и при подборе параметров L, C так, чтобы $\omega_0 = \omega_c$, можно записать выражение для передаточной функции электрической цепи на рис. 8, а по огибающей модулированного сигнала в виде

$$W(p) = \frac{1}{T_{\text{э}}p + 1}. \quad (10)$$

11. Найти передаточную функцию электрической цепи (рис. 8, а) по огибающей модулированного сигнала при $R = 1000 \text{ ом}$, $C = 0,2 \text{ мкф}$, $L = 0,8 \text{ гн}$ и несущей частоте входного сигнала $f_c = 400 \text{ гц}$.

Решение. Воспользуемся формулами предыдущей задачи.

Постоянные времени $T_0 = \sqrt{LC} = \sqrt{0,8 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$, $T = RC = 1000 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.
Условие (7) выполняется. Резонансная частота $\omega_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 2500 \text{ сек}^{-1}$. Частота входного сигнала $\omega_c = 2\pi f_c = 6,28 \cdot 400 = 2512 \text{ сек}^{-1}$, т. е. условие $\omega_0 = \omega_c$ практически выполняется. Условие (7) можно уточнить по формуле (6)

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{T^2}{4T_0^4}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,04 \cdot 10^{-6}}{4(0,16 \cdot 10^{-6})^2}} = 2575 \text{ сек}^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что а. ч. х. симметрична относительно резонансной частоты, так как $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_0$.

Эквивалентная постоянная времени $T_9 = 2 \frac{L}{R} = 2 \frac{0,8}{1000} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ сек. Передаточная функция по огибающей модулированного сигнала

$$W(p) = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-3} p + 1}.$$

12. Найти передаточную функцию пружины и демпфера (рис. 9), если пренебречь влиянием массы подвижных частей и принять за входную величину силу F , а за выходную — перемещение точки A (поршня) x .

Решение. Составляем уравнение равновесия сил $F = F_d + F_n = c_1 \dot{x} + c_2 x$, где c_1 — коэффициент демпфирования, а c_2 — коэффициент упругости пружины. Тогда имеем $(T_1 p + 1)x = kF$, где $T_1 = \frac{c_1}{c_2}$, $k = c_2^{-1}$, откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}.$$

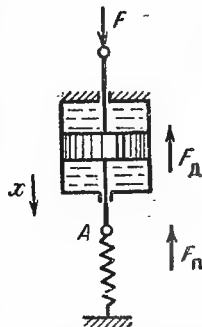


Рис. 9. Поршень с цилиндром и пружиной.

13. Найти передаточную функцию по условиям предыдущей задачи, если учесть приведенную к точке A (см. рис. 9) массу подвижных частей.

Ответ. Искомая передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2}},$$

m — масса подвижных частей.

14. Изменится ли тип динамического звена, к которому относится демпфер, рассмотренный в задачах 8 и 9, если входную и выходную величины поменять местами? Найти передаточные функции.

Ответ. Да, изменится. Без учета массы передаточная функция

$$W(p) = \frac{F(p)}{X(p)} = kp,$$

где $k = c_1$. С учетом массы —

$$W(p) = \frac{F(p)}{X(p)} = k(Tp + 1)p,$$

$T = \frac{m}{c_1}$. Коэффициенты m и c_1 определены в задачах 8 и 9.

15. Составить дифференциальное уравнение движения и передаточную функцию двигателя с независимым возбуждением (рис. 10, а) относительно угловой скорости Ω при моменте нагрузки $M_n \neq 0$.

Ответ. Дифференциальное уравнение движения

$$(T_\gamma T_M p^2 + T_M p + 1) \Omega(t) = k u_{\text{вх}}(t).$$

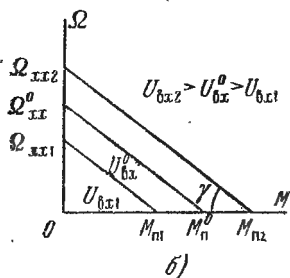
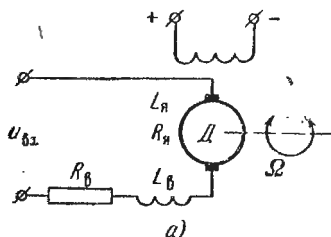


Рис. 10. Схема и механические характеристики к задаче 15.

$T_\gamma = \frac{L_\gamma + L_\beta}{R_\gamma + R_\beta}$ — электромагнитная постоянная времени цепи якоря; L_γ , R_γ — индуктивность и активное сопротивление якоря; L_β , R_β — индуктивность и внутреннее сопротивление оконечного каскада усилителя, питающего двигатель.

$$T_M = J \frac{R_\gamma}{c_M c_e} = J \frac{\Omega_x x}{M_n} = J \cdot \beta —$$

электромеханическая постоянная времени двигателя; J — приведенный к валу двигателя момент инерции вращающихся частей; M_n — пусковой момент двигателя при $\Omega = 0$; Ω_{xx} — угловая скорость холостого хода при моменте двигателя $M = 0$;

$$c_e = \frac{U_{\text{вх}}^0}{\Omega_{\text{хх}}^0}; \quad c_M = \frac{M_n^0}{I_{\text{я.к.з.}}^0}, \quad I_{\text{я.к.з.}}^0 = \frac{U_{\text{вх}}^0}{R_\gamma + R_\beta}$$

— ток короткого замыкания цепи якоря двигателя при $\Omega = 0$, $\beta = \left| \frac{d\Omega}{dM} \right| = \frac{\Omega_{\text{кк}}}{M_{\text{н}}} — коэффициент наклона механических характеристик двигателя, $k = \frac{\Omega_{\text{кк}}^0}{U_{\text{вх}}^0} = \frac{1}{c_e} — коэффициент передачи. Для двигателей постоянного тока с независимым возбуждением $\beta = \text{const}$ при $u_{\text{вх}} = \text{var}$.$$

Передаточная функция двигателя

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1}.$$

16. Найти дифференциальное уравнение движения и передающую функцию двигателя с независимым возбуждением (см. рис. 10, а) относительно угла поворота α .

Ответ:

$$(T_{\text{м}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1) p \alpha(t) = k u_{\text{вх}}(t),$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1)}.$$

17. Найти передаточные функции двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, пренебрегая влиянием электромагнитных переходных процессов в цепи якоря (см. задачи 15 и 16).

Ответ:

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_{\text{м}} p + 1},$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_{\text{м}} p + 1)}.$$

18. Найти передаточные функции двухфазного асинхронного двигателя (рис. 11, а) при моменте нагрузки $M_{\text{н}} = 0$. Механические характеристики имеют вид рис. 11, б, а электромагнитными переходными процессами в статоре и роторе можно пренебречь.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, передаточные функции асинхронного двигателя по угловой

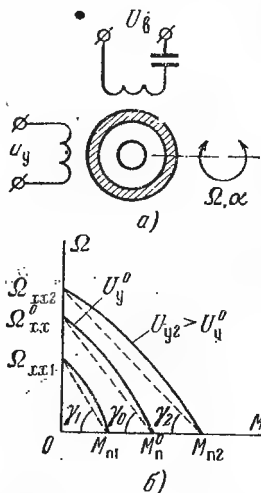


Рис. 11. Схема и механические характеристики к задаче 18.

скорости

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_m p + 1}$$

и по углу

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_m p + 1)}.$$

Электромеханическая постоянная времени T_m пропорциональна коэффициенту наклона механической характеристики β (см. задачу 15):

$$T_m = J\beta_0 = J \frac{\Omega_{x.к}^0}{M_{п}^0},$$

где J — приведенный к валу двигателя момент инерции вращающихся частей; $\Omega_{x.к}^0$, $M_{п}^0$, β_0 — соответственно угловая скорость холостого хода, пусковой момент и коэффициент наклона аппроксимированной прямой линией

механической характеристики, соответствующей наиболее часто принимаемым значениям управляющего напряжения $u_y = U_y^0$ в автоматической системе

(см. рис. 11, б), $k = \frac{\Omega_{xx}^0}{U_y^0}$ —

коэффициент передачи двигателя.

19. Для компенсации индуктивного сопротивления обмотки управления двухфазного асинхронного двигателя в ее цепь включают конденсатор емкостью C (рис. 12, а). Требуется найти передаточную функцию двигателя с учетом динамических свойств образовавшегося контура LCR в цепи обмотки управления.

Решение. Динамические свойства, выражающиеся инерционностью электромеханических процессов двига-

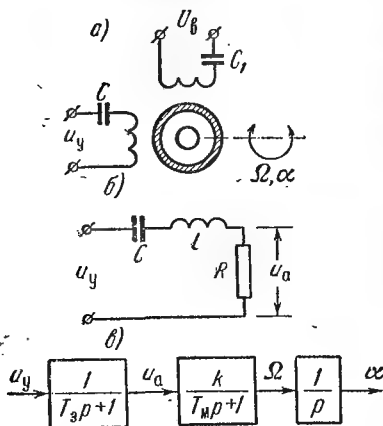


Рис. 12. Электрические и структурная схемы к задаче 19.

теля, полностью определяются передаточными функциями $W_{\Omega}(p)$ и $W_{\alpha}(p)$ (см. задачу 18).

Для определения передаточной функции контура LCR обмотки управления составим эквивалентную схему цепи обмотки управления рис. 12, б, где L — индуктивность,

$R = \frac{P_y}{I_y^2}$ — приведенное активное сопротивление обмотки

управления, I_y — номинальный ток, P_y — номинальная активная мощность обмотки управления, C — емкость конденсатора, включаемого в цепь управления. Влиянием внутреннего сопротивления источника, питающего обмотку управления, пренебрегаем.

Контур LCR подробно рассмотрен в задаче 10. Его передаточная функция по огибающей модулированного сигнала с несущей частотой, равной частоте сети f_c или круговой частоте сети $\omega_c = 2\pi f_c$,

$$W(p) = \frac{1}{T_{\Sigma}p + 1}, \quad T_{\Sigma} = 2 \frac{L}{R}. \quad (1)$$

Передаточная функция (1) справедлива при выполнении условий $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 2\pi f_c$.

При выполнении обоих условий передаточные функции двухфазного асинхронного двигателя

$$W_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_y(p)} = \frac{k}{(T_{\Sigma}p + 1)(T_{\Sigma}p + 1)},$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_y(p)} = \frac{k}{p(T_{\Sigma}p + 1)(T_{\Sigma}p + 1)}.$$

Структурная схема двигателя принимает вид, изображенный на рис. 12, в.

После незначительных преобразований можно получить новые выражения для определения эквивалентной постоянной времени

$$T_{\Sigma} = 2 \frac{L}{R} = \frac{2}{\omega_c} \frac{x_L}{R} = \frac{2}{\omega_c} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{\omega_c} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}, \quad (2)$$

где $\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x_L = \omega_c L$ — индуктивное сопротивление обмотки управления, $\cos \varphi$ — коэффициент мощности

обмотки управления при работе без конденсатора (в номинальном режиме).

20. Индуктивность обмотки управления двухфазного асинхронного двигателя $L = 0,05$ гн, а приведенное активное сопротивление $R = 150$ ом. Какой должна быть емкость конденсатора, включаемого в цепь обмотки управления, если частота сети $f_c = 400$ гц? Можно ли пользоваться передаточной функцией (1) из предыдущей задачи?

Ответ. 1) $C = 3,2$ мкф. 2) Можно, так как $R = 150$ ом $< 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 250$ ом.

21. Найти передаточную функцию пассивной электрической цепи LC в виде моста, изображенного на рис. 13 (см. задачи 6 и 7).

Ответ. $W(p) = \frac{1 - T^2 p^2}{1 + T^2 p^2}$,

$$T = \sqrt{LC}.$$

22. Найти дифференциальное уравнение движения поршня

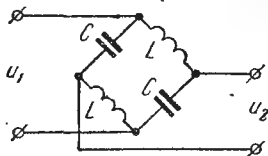


Рис. 13. Мостовая схема к задаче 21.

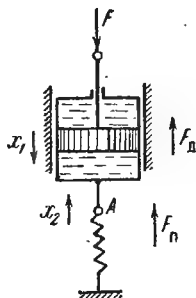


Рис. 14. Поршень с цилиндром и пружиной.

относительно корпуса x_1 под действием силы F (рис. 14) без учета массы подвижных частей.

Решение. Составим уравнение равновесия сил $F = F_d + F_n = c_1 \dot{x}_3 + c_2 x_2$, где $x_3 = x_1 - x_2$ — перемещение поршня относительно цилиндра, x_2 — перемещение точки А. Подставив в уравнение сил вместо x_3 его значение, получим

$$p x_1(t) = k_1 F(t) + k_2 (\tau_1 p - 1) x_2(t),$$

где $k_1 = c_1^{-1}$, $k_2 = c_2 c_1^{-1}$, $\tau_1 = c_1 c_2^{-1}$ (см. задачи 8 и 12).

23. Найти дифференциальное уравнение движения по условиям предыдущей задачи, учитывая массу подвижных частей.

Ответ.

$$(T_1 p + 1) p x_1(t) = k_1 F(t) + k_2 (\tau_2^2 p^2 + \tau_1 p - 1) x_2(t),$$

где $T_1 = \frac{m_1}{c_1}$, $\tau_2 = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{c_2}}$, m_1 — масса поршня с рычагом, m_2 — приведенная масса пружины с цилиндром (см. задачи 9 и 13).

24. Найти дифференциальное уравнение и передаточную функцию центробежного измерителя угловой

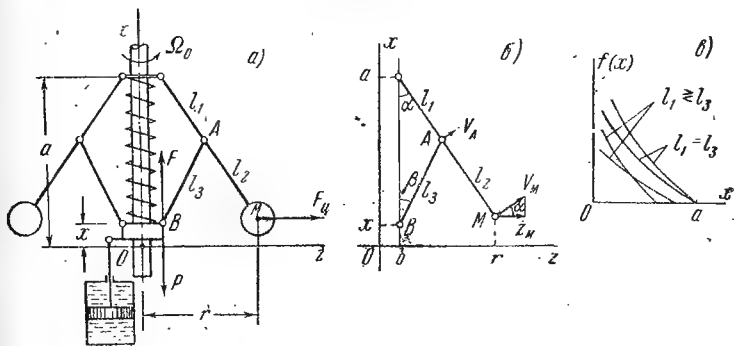


Рис. 15. Центробежный измеритель скорости и график к задаче 24.

скорости (ЦИС) на рис. 15, а, если принять за выходную величину перемещение муфты x , а за входную — приращение угловой скорости $\Delta\Omega$ и считать известными приведенную к точке M массу всех шаров m ; длины рычагов l_1 , l_2 , l_3 ; приведенные в точке B муфты а) силу пружины $F_{\text{п}}$, б) силу вязкого трения и демпфера $F_{\text{д}}$, в) инерционные силы приведенных масс $F_{\text{и}}$ и г) приведенные силы от веса всех подвижных частей $F_{\text{в}}$. Влиянием сил сухого трения пренебречь.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат z, x . Ось x совмещена с осью вращения ЦИС, а ось z — с положением точки B при $\Omega = 0$, когда муфта под действием пружины находится в положении $x = 0$, где выходная величина x есть координата точки B .

Движущей является центробежная сила шаров

$$F_{ц} = mr\Omega^2, \quad (1)$$

где $r = z_m$ — расстояние точки M от оси x .

На муфту действуют приведенные силы сопротивления P и приведенная движущая сила F (см. рис. 15, а). Приведем к точке B силу $F_{ц}$ на основании равенства мощностей

$$F\dot{x}_B = F_{ц}\dot{z}_M, \quad F = F_{ц} \frac{\dot{z}_M}{\dot{x}_B}, \quad (2)$$

где $\dot{x}_B$, $\dot{z}_M$ — составляющие скорости перемещения точек B и M по соответствующим координатным осям. Определим $\dot{z}_M$:

$$\dot{z}_M = V_M \cos \alpha = V_A \frac{l}{l_1} \cos \alpha = \dot{x}_B \frac{l}{l_1} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \quad (3)$$

где $l = l_1 + l_2$, V_A , V_M — линейные скорости точек A и M при их вращательном движении относительно общего центра с координатами (b, a) , α , β — углы, показанные на рис. 15, б.

Подставив (3) в (2) с учетом (1), получим

$$F = m \frac{l}{l_1} \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \Omega^2 = k_1 f_1(r, \alpha, \beta) \Omega^2, \quad (4)$$

где $k_1 = m \frac{l}{l_1}$, $f_1(r, \alpha, \beta) = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$.

Из рис. 15, б находим

$$r = b + l \sin \alpha, \quad x = a - l_1 \cos \alpha - l_3 \cos \beta, \quad (5)$$

где $a = l_1 + l_3$, b — радиус муфты и фланца, к которому крепятся рычаги-держатели шаров. Из соотношения (5) видно, что переменные r , x , α и β связаны между собой нелинейной функциональной зависимостью. Следовательно, можно найти

$$f_1(r, \alpha, \beta) = f(x). \quad (6)$$

Например, при $l_3 = l_1$ ($\alpha = \beta$, $a = 2l_1$)

$$f_1(r, \alpha) = f(x) = (2l_1 - x) \left[\frac{b}{2 \sqrt{4l_1^2 - (2l_1 - x)^2}} + \frac{l}{4l_1} \right]. \quad (6, a)$$

Подставив (6) в (4), получим

$$F = k_1 f(x) \Omega^2. \quad (7)$$

Линеаризуем выражение (7) в окрестности малых отклонений переменных x и Ω относительно выбранного установившегося режима $\Omega = \Omega_0$, $x = x_0$:

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega} \right)^0 \Delta \Omega = k_1 \Omega_0^2 D \Delta x + 2k_1 \Omega_0 E \Delta \Omega, \quad (8)$$

где

$$D = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad E = f(x) \big|_{x=x_0}.$$

В установившемся режиме приведенная сила сопротивления $P = F_{\Pi} + F_B$. При этом приведенная сила от веса подвижных частей (в основном от веса шаров) F_B также зависит от перемещения муфты x ; эта зависимость также является нелинейной. Приближенно примем $F_B = \text{const}$. Тогда в динамическом режиме для малых отклонений уравнение равновесия сил примет вид

$$\Delta F_{\Pi} + \Delta F_d + \Delta F_{\Pi} = \Delta P = \Delta F,$$

или

$$m_{\Pi} \Delta \ddot{x} + c_1 \Delta \dot{x} + c_2 \Delta x = k_1 \Omega_0^2 D \Delta x + 2k_1 \Omega_0 E \Delta \Omega, \quad (9)$$

где m_{Π} — приведенная к точке B масса подвижных частей, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ — скорость и ускорение муфты, c_1 — коэффициент демпфирования, c_2 — коэффициент упругости пружины. Преобразуем уравнение (9) к виду

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \Delta x(t) = k \Delta \Omega(t), \quad (10)$$

где

$$T_2 = \sqrt{\frac{m_{\Pi}}{c_2 - k_1 \Omega_0^2 D}}, \quad T_1 = \frac{c_1}{c_2 - k_1 \Omega_0^2 D}, \quad k = \frac{2k_1 \Omega_0 E}{c_2 - k_1 \Omega_0^2 D}.$$

Для всех практически осуществимых ЦИС по схеме рис. 15, а функция $f(x)$ имеет падающий характер (рис. 15, в), а коэффициент $D = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ имеет отрицательный знак, который необходимо учитывать при

вычислении параметров k , T_1 , T_2 и при записи уравнений (9) и (10).

Передаточная функция ЦИС

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

§ 1.2. Типовые динамические звенья

25. Какое динамическое звено имеет функцию веса $w(t) = 50(e^{-5t} - e^{-10t}) \cdot 1(t)$? Найти параметры этого звена и записать выражение передаточной функции.

Решение. *Способ 1.* Приведенная функция веса состоит из двух экспонент. Следовательно, это апериодическое звено второго порядка с весовой функцией вида

$$w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t),$$

откуда находим $T_3 = 0,2$ сек, $T_4 = 0,1$ сек и $k = (0,2 - 0,1) \times \times 50 = 5$,

$$W(p) = \frac{5}{(0,2p + 1)(0,1p + 1)}.$$

Способ 2.

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt = \frac{5}{(1 + 0,2p)(1 + 0,1p)},$$

откуда $T_3 = 0,2$ сек, $T_4 = 0,1$ сек, $k = 5$.

26. Найти переходную функцию неустойчивого звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{5}{0,1p - 1}$.

Ответ. $h(t) = 5(-1 + e^{10t}) \cdot 1(t)$.

27. Найти параметры передаточной функции колебательного звена, если его переходная функция имеет вид, изображенный на рис. 16.

Решение. *Способ 1.* Переходная характеристика колебательного звена записывается в виде

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \cdot 1(t).$$

Затухание колебаний происходит по экспоненте с постоянной времени $T_\gamma = \frac{1}{\gamma} = 0,5$ сек, откуда $\gamma = 2$ сек⁻¹. Период колебаний $T_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,628$ сек, откуда $\lambda = 10$ сек⁻¹.

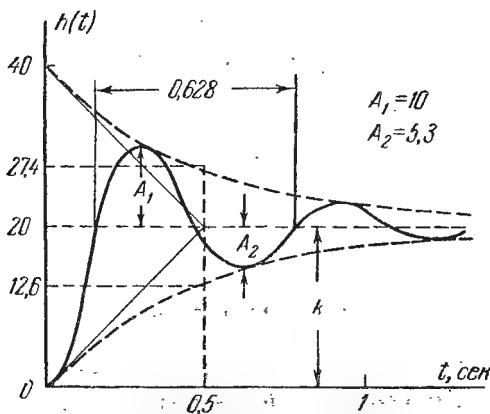


Рис. 16. Переходная функция.

Составляем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\xi}{T} = 2, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = 10, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

решив которую, находим $T = 0,1$ сек, $\xi = 0,2$. Из графика рис. 16 определяем $k = 20$.

Способ 2. Определив амплитуды A_1 и A_2 (см. рис. 16), можно найти коэффициент затухания переходного процесса γ по формуле

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{10}{\pi} \ln \frac{10}{5,3} \approx 2.$$

Подставляя значения частоты затухающих колебаний λ и коэффициента γ в систему уравнений (1), находим постоянную времени T и параметр затухания ξ .

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{20}{0,01 p^2 + 0,04 p + 1}.$$

28. Устройство работает на переменном токе. Каким типовым звеном определяются его динамические свойства по огибающей, если переходная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 17? Колебания с частотой

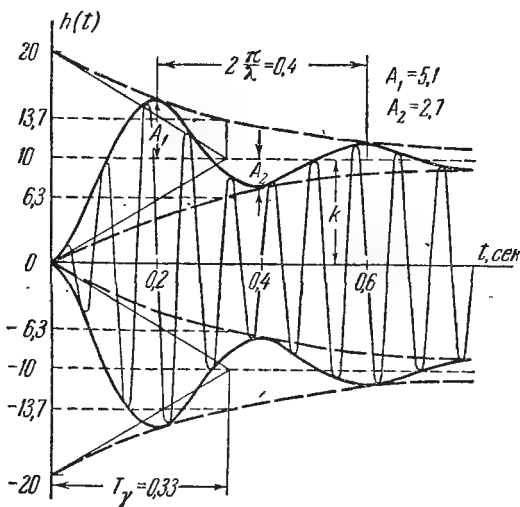


Рис. 17. Переходная функция звена, работающего на переменном токе.

сети на графике показаны без соблюдения масштаба времени. Определить параметры передаточной функции звена.

Ответ. Колебательное звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{0,0042 p^2 + 0,028 p + 1}.$$

29. Известны следующие параметры центробежного измерителя скорости (см. рис. 15): приведенная к точке М масса шаров $m = 0,02$ кг; $l = 6$ см, $l_1 = 3$ см; стабилизируемая угловая скорость $\Omega_0 = 150$ сек⁻¹; коэф-

коэффициент $D = -0,11 \cdot 10^{-3}$; приведенная к точке B масса подвижных частей $m_n = 0,09$ кг; коэффициент упругости пружины $c_2 = 0,7$ н · м⁻¹.

Каким должен быть коэффициент демпфирования c_1 , чтобы центробежный измеритель скорости был апериодическим звеном второго порядка?

Ответ.

$$c_1 \geq 0,54 \text{ н} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-1}$$

Для решения этой задачи следует воспользоваться данными задачи 24.

30. По переходной функции, изображенной на рис. 18, определить тип и передаточную функцию звена. Переходная функция представляет собой сумму линейного и экспоненциального членов.

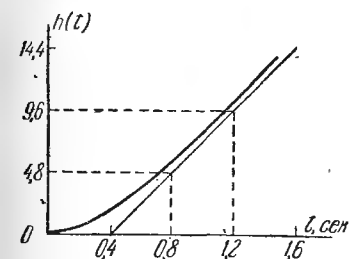


Рис. 18. Переходная функция.

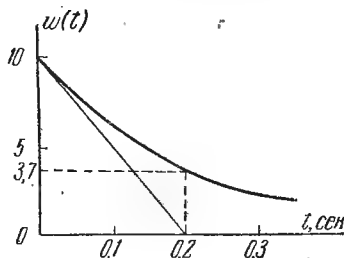


Рис. 19. Весовая функция.

Ответ. Это — интегрирующее звено с замедлением. Его переходная функция

$$h(t) = k \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \cdot 1(t).$$

Уравнение асимптоты переходной функции $h_A(t) = k(t - T)$ позволяет определить параметры передаточной функции

$$k = \frac{9,6 - 4,8}{1,2 - 0,8} = 12 \text{ сек}^{-1}, \quad T = 0,4 \text{ сек}, \quad W(p) = \frac{12}{p(0,4p + 1)}.$$

31. Функция веса апериодического звена первого порядка изображена на рис. 19. Определить параметры передаточной функции.

Ответ. Коэффициент передачи $k = 2$ и постоянная времени $T = 0,2$ сек.

32. Как изменятся постоянные времени, коэффициент передачи, время и форма переходного процесса апериодического второго порядка или колебательного звена при охвате его жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи k_0 (рис. 20)?

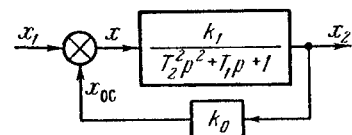


Рис. 20. Структурная схема к задаче 32.

Ответ. Время переходного процесса уменьшится, так как уменьшатся обе постоянные времени T_2 и T_1 ; форма переходного процесса изменится (например, вместо апериодической может стать колебательной), так как постоянная времени T_1 уменьшится в большей степени (в $1 + k_1 k_0$ раз), чем T_2 (в $\sqrt{1 + k_1 k_0}$ раз). Коэффициент передачи уменьшится в $1 + k_1 k_0$ раз.

33. Как изменятся постоянная времени T_1 и коэффициент передачи k_1 апериодического звена первого порядка, если его охватить идеальной гибкой отрицательной обратной связью с передаточной функцией цепи обратной связи $W_{oc}(p) = k_0 p$?

Ответ. Постоянная времени возрастает ($T = T_1 + k_1 k_0$), а коэффициент передачи останется тем же ($k = k_1$).

§ 1.3. Дифференциальные уравнения и передаточные функции автоматических систем

34. На рис. 21, а представлена принципиальная схема автоматической системы регулирования (стабилизации) скорости теплового двигателя. Чувствительным элементом (ЧЭ) является центробежный измеритель скорости (ЦИС). Исполнительным устройством (ИУ) является гидравлический двигатель, состоящий из золотника 2, связанного с муфтой ЦИС 3, и силового поршня 1, связанного с заслонкой, или регулирующим органом (РО).

Составить структурную схему, найти передаточные функции разомкнутой системы $W(p)$, замкнутой системы относительно регулируемой величины $\Phi(p)$, относительно

ошибки $\Phi_x(p)$ и по возмущению $\Phi_l(p)$, если линеаризованные уравнения отдельных звеньев имеют такой вид:

1) двигатель (объект)

$$(T_0 p + 1) \Omega = k_0 y - k_1 M_n,$$

где Ω — угловая скорость, y — перемещение заслонки, M_n — момент нагрузки;

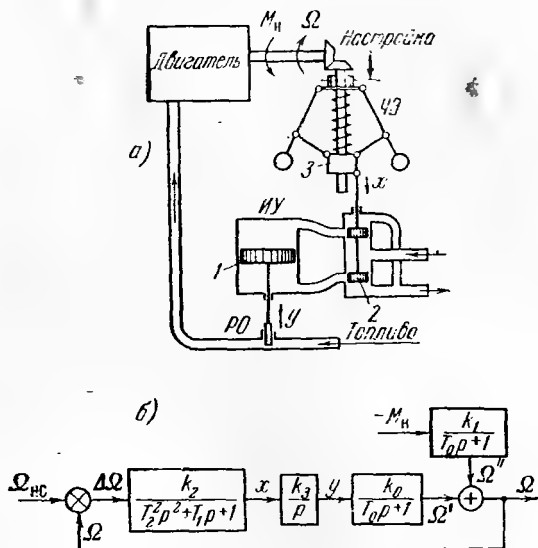


Рис. 21. Принципиальная (а) и структурная (б) схемы к задаче 34.

2) центробежный измеритель скорости (см. задачу 24)

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x = k_2 \Delta \Omega,$$

где x — перемещение муфты и золотника, T_2 , T_1 — постоянные времени ЦИС;

3) гидравлический двигатель

$$p y = k_3 x,$$

k_0 , k_1 , k_2 и k_3 — коэффициенты передачи.

Решение. Составим структурную схему (рис. 21, б), где обозначены: $\Omega_{\text{нс}}$ — приведенная или эквивалентная угловая скорость настройки, задаваемая поджатием пружины ЦИС (см. рис. 21, а); Ω' — составляющая угловой скорости от перемещения заслонки y , а Ω'' — от момента нагрузки $M_{\text{н}}$, причем $\Omega = \Omega' + \Omega''$, и ошибка или отклонение $\Delta\Omega = \Omega_{\text{нс}} - \Omega$. Тогда передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию

$$W(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_{\text{нс}}(p)} = \frac{K}{p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}, \quad K = k_0 k_2 k_3 [\text{сек}^{-1}],$$

и по возмущению (по нагрузке)

$$W_f(p) = \frac{\Omega(p)}{M_{\text{н}}(p)} = - \frac{k_1}{T_0 p + 1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно регулируемой величины

$$\Phi(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_{\text{нс}}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K}{p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) + K}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки

$$\Phi_x(p) = \frac{\Delta\Omega(p)}{\Omega_{\text{нс}}(p)} = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}{p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) + K}$$

и по возмущению

$$\Phi_f(p) = \frac{\Omega(p)}{M_{\text{н}}(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} = - \frac{k_1 p (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}{p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) + K}.$$

35. Найти передаточные функции системы стабилизации угловой скорости (см. предыдущую задачу), если гидравлический двигатель охватить гибкой отрицательной обратной связью в виде демпфера и пружины (см. рис. 2).

Ответ.

$$W(p) = \frac{K(T_{\text{ос}} p + 1)}{p(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(T p + 1)(T_0 p + 1)},$$

$$K = k_2 k'_3 k_0, \quad W_f(p) = \frac{-k_1}{T_0 p + 1},$$

$$\Phi(p) = \frac{K(T_{oc}p + 1)}{p(T_2^2p^2 + T_1p + 1)(Tp + 1)(T_0p + 1) + K(T_{oc}p + 1)},$$

$$\Phi_x(p) = \frac{p(T_2^2p^2 + T_1p + 1)(Tp + 1)(T_0p + 1)}{p(T_2^2p^2 + T_1p + 1)(Tp + 1)(T_0p + 1) + K(T_{oc}p + 1)},$$

$$\Phi_f(p) = \frac{k_1p(T_2^2p^2 + T_1p + 1)(Tp + 1)}{p(T_2^2p^2 + T_1p + 1)(Tp + 1)(T_0p + 1) + K(T_{oc}p + 1)},$$

где коэффициенты T_{oc} , T и $k'_3 = k$ определены в задаче 2, а остальные коэффициенты — в задаче 34.

36. Найти дифференциальные уравнения движения автоматической системы стабилизации угловой скорости (рис. 21) относительно регулируемой величины (Ω) при задающем воздействии (Ω_{nc}) и при возмущении (M_n). Дифференциальные уравнения отдельных звеньев системы рис. 21 приведены в задаче 34.

Ответ.

$$a) [p(T_0p + 1)(T_2p^2 + T_1p + 1) + K] \Omega(t) = K\Omega_{nc}(t)$$

или

$$(a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4) \Omega(t) = b_0\Omega_{nc}(t),$$

где $a_0 = T_0T_2^2$, $a_1 = T_2^2 + T_0T_1$, $a_2 = T_0 + T_1$, $a_3 = 1$, $a_4 = b_0 = K$;

б)

$$[p(T_0p + 1)(T_2p^2 + T_1p + 1) + K] \Omega(t) =$$

$$= -k_1p(T_2p^2 + T_1p + 1)M_n(t)$$

или

$$(a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4) \Omega(t) =$$

$$= -(d_0p^3 + d_1p^2 + d_2p)M_n(t),$$

где

$$d_0 = k_1T_2^2, \quad d_1 = k_1T_1, \quad d_2 = k_1.$$

37. Найти дифференциальные уравнения движения системы стабилизации угловой скорости (см. рис. 21) относительно ошибки ($\Delta\Omega$) по задающему воздействию (Ω_{nc}) и по возмущению (M_n). Дифференциальные уравнения отдельных звеньев системы рис. 21 определены в задаче 34.

Ответ.

$$\text{а) } [p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) + K] \Delta \Omega(t) = \\ = p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \Omega_{\text{ис}}(t);$$

$$\text{б) } [p(T_0 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) + K] \Delta \Omega(t) = \\ = k_1 p (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) M_{\text{н}}(t).$$

38. Составить структурную схему и найти передаточные функции разомкнутой $W(p)$, $W_f(p)$ и замкнутой

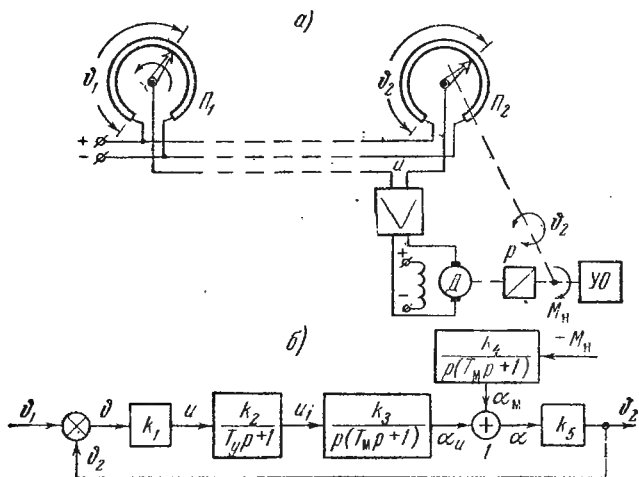


Рис. 22. Принципиальная (а) и структурная (б) схемы следящей системы.

$\Phi(p)$, $\Phi_x(p)$, $\Phi_f(p)$ (см. задачу 34) следящей системы (рис. 22, а), если звенья системы описываются следующими уравнениями:

- 1) элемент сравнения $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$,
- 2) потенциметрический датчик $u = k_1 \vartheta$;
- 3) усилитель $(T_y p + 1) u_1 = k_2 u$, T_y — постоянная времени усилителя;
- 4) двигатель $(T_m p + 1) p \alpha = k_3 u_1 - k_4 M_{\text{н}}$, T_m — постоянная времени двигателя;

5) редуктор $\vartheta_2 = k_5 \alpha$, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 — коэффициенты передачи.

Ответ. Структурная схема представлена на рис. 22, б;

$$W(p) = \frac{K}{p(T_{yp} + 1)(T_{mp} + 1)}, \quad K = k_1 k_2 k_3 k_5 [\text{сек}^{-1}],$$

$$W_f(p) = - \frac{k_4 k_5}{p(T_{mp} + 1)},$$

$$\Phi(p) = \frac{K}{p(T_{yp} + 1)(T_{mp} + 1) + K},$$

$$\Phi_f(p) = - \frac{k_4 k_5 (T_{yp} + 1)}{p(T_{yp} + 1)(T_{mp} + 1) + K}.$$

$$\Phi_x(p) = \frac{p(T_{yp} + 1)(T_{mp} + 1)}{p(T_{yp} + 1)(T_{mp} + 1) + K}.$$

39. Составить структурную схему и найти передаточные функции следящей системы (см. рис. 22, а), если

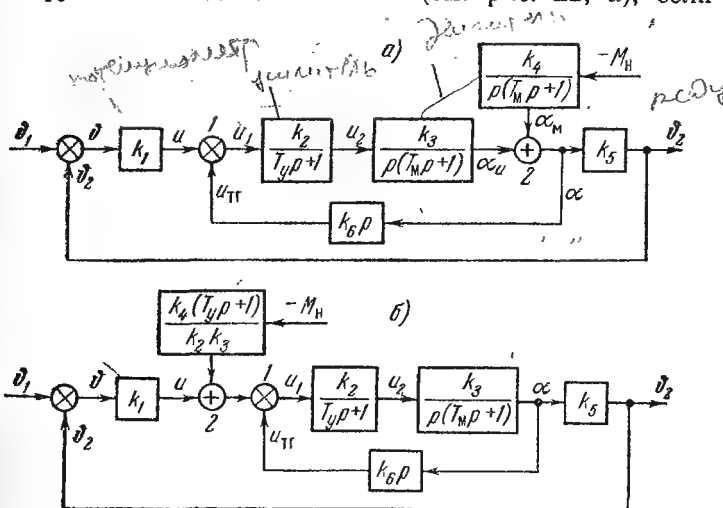


Рис. 23. Структурные схемы следящей системы.

непосредственно с валом двигателя соединить тахогенератор, а его напряжение подать на вход усилителя в противофазе с выходным напряжением потенциометрического

датчика угла рассогласования. Дифференциальное уравнение тахогенератора $u_{тг} = k_6 p \alpha$. Уравнения остальных звеньев следящей системы приведены в условии предыдущей задачи.

Ответ. Структурная схема представлена на рис. 23, а. Для вывода передаточных функций структурную схему рис. 23, а необходимо преобразовать: перенести сумматор 2 на вход сумматора 1 (рис. 23, б). Тогда

$$W(p) = \frac{K}{p[(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6]}, \quad K = k_1 k_2 k_3 k_5,$$

$$W_f(p) = \frac{k_4 k_5 (T_y p + 1)}{p[(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6]},$$

$$\Phi(p) = \frac{K}{p[(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] + K},$$

$$\Phi_x(p) = \frac{p[(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6]}{p[(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] + K},$$

$$\Phi_f(p) = \frac{k_4 k_5 (T_y p + 1)}{p[(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] + K}.$$

40. Найти дифференциальные уравнения движения следящей системы (см. рис. 22) относительно ошибки (ϑ) по задающему воздействию (ϑ_1) и по возмущению (M_H). Дифференциальные уравнения отдельных звеньев приведены в условии задачи 38.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{а) } [p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K] \vartheta(t) = \\ = p(T_y p + 1)(T_m p + 1) \vartheta_1(t), \end{aligned}$$

или

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) \vartheta(t) = (b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p) \vartheta_1(t),$$

$$a_0 = b_0 = T_y T_m, \quad a_1 = b_1 = T_y + T_m, \quad a_2 = b_2 = 1,$$

$$a_3 = K, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

$$\text{б) } [p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K] \vartheta(t) = k_4 k_5 (T_y p + 1) M_H(t)$$

или

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) \vartheta(t) = (d_0 p + d_1) M_H(t),$$

$$d_0 = k_4 k_5 T_y, \quad d_1 = k_4 k_5, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

41. На рис. 24, а изображена принципиальная схема дистанционной следящей системы с синусно-косинусными вращающимися трансформаторами (СКВТ), на которой обозначены: ϑ_1 , ϑ_2 — углы поворота командной и исполнительной осей, $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ — ошибка, PM — рабочий механизм (объект), P — редуктор, D — двигатель, $TГ$ — тахогенератор. Параметры элементов следующие: $k_1 [в \cdot рад^{-1}]$ — коэффициент передачи чувствительного элемента (СКВТ)

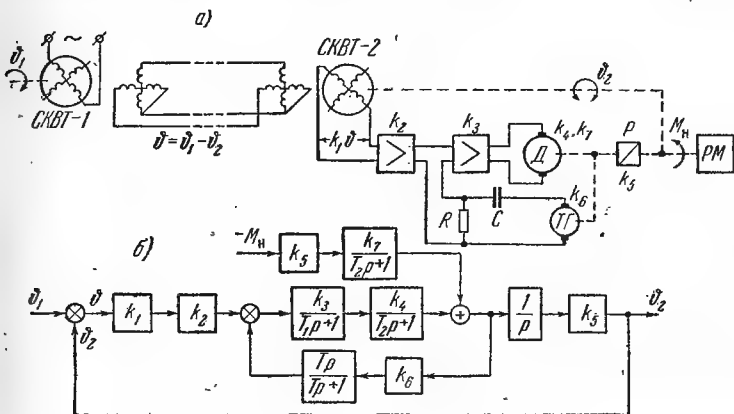


Рис. 24. Следящая система.

в линейной части характеристики, k_2 и k_3 — коэффициенты усиления усилителей по напряжению, $k_4 [рад \cdot в^{-1} \cdot сек^{-1}]$ — коэффициент передачи исполнительного двигателя, $k_5 = = n^{-1}$ — коэффициент передачи редуктора, n — передаточное отношение, $k_6 [в \cdot сек \cdot рад^{-1}]$ — коэффициент передачи тахогенератора, $k_7 [рад \cdot н^{-1} \cdot см^{-1} \cdot сек^{-1}]$ — коэффициент наклона механической характеристики двигателя, T_1 и T_2 — постоянные времени усилителя и двигателя, $T = RC$ — постоянная времени дифференцирующей цепи.

Требуется составить структурную схему и определить передаточную функцию разомкнутой системы, передаточные функции замкнутой системы: а) относительно управляемой величины по задающему воздействию, б) относительно ошибки по задающему воздействию,

в) относительно ошибки по возмущающему воздействию и добротность следящей системы по моменту нагрузки M_n .

Ответ. Структурная схема изображена на рис. 24, б.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p[(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + Tp) + k_3k_4k_6Tp]},$$

где добротность по скорости (отношение постоянной скорости слежения к установившейся ошибке)

$$K = k_1k_2k_3k_4k_5 [\text{сек}^{-1}].$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно управляемой величины по задающему воздействию

$$\Phi(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p[(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + Tp) + k_3k_4k_6Tp] + K(1 + Tp)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию

$$\Phi_0(p) = \frac{p[(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + Tp) + k_3k_4k_6Tp]}{p[(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + Tp) + k_3k_4k_6Tp] + K(1 + Tp)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки по возмущающему воздействию (моменту нагрузки M_n)

$$\Phi_M(p) = \frac{k_7k_5^2(1 + T_1p)(1 + Tp)}{p[(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + Tp) + k_3k_4k_6Tp] + K(1 + Tp)}.$$

Добротность по моменту (отношение момента нагрузки M_n на исполнительной оси системы к рассогласованию в установившемся режиме)

$$K_M = \frac{K}{k_7k_5^2} = \frac{Kn^2}{k_7} = \frac{k_1k_2k_3k_4n}{k_7}.$$

42. Для предыдущей задачи определить численные значения коэффициентов, входящих в передающую функцию разомкнутой системы, при следующих исходных данных: крутизна чувствительного элемента $k_1 = 1 \text{ в/град} = 57,3 \text{ в/рад}$, коэффициенты усиления усилителя $k_2 = 2,5$ и $k_3 = 80$, номинальное значение напряжения двигателя $U_n = 110 \text{ в}$, скорость холостого хода $n_{\text{хх}} = 9000 \text{ об/мин}$ и пусковой момент $M_n = 55 \text{ Г} \cdot \text{см} =$

$= 0,54 \text{ н} \cdot \text{см}$, момент инерции двигателя с объектом $J = 0,098 \text{ г} \cdot \text{см}^2 = 0,01 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, передаточное отношение редуктора $n = 1000$, коэффициент передачи тахогенератора $k_6 = 0,001 \text{ в} \cdot \text{мин/об} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ в} \cdot \text{сек/рад}$, постоянная времени усилителя $T_1 = 0,01 \text{ сек}$, постоянная времени дифференцирующей цепи $T = 0,14 \text{ сек}$.

Решение. Коэффициент передачи двигателя

$$k_4 = \frac{\Omega_{\text{х.х}}}{U_{\text{н}}} = \frac{\pi n_{\text{х.х}}}{30 U_{\text{н}}} = \frac{3,14 \cdot 9000}{30 \cdot 110} = 8,6 \text{ рад} \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Коэффициент наклона механической характеристики

$$k_7 = \frac{\Omega_{\text{х.х}}}{M_{\text{н}}} = \frac{\pi n_{\text{х.х}}}{30 M_{\text{н}}} = \frac{3,14 \cdot 9000}{30 \cdot 55} = 17,2 \text{ рад} \cdot \text{Г}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Постоянная времени двигателя

$$T_2 = J \frac{\Omega_{\text{х.х}}}{M_{\text{н}}} = J k_7 = 0,01 \cdot 17,2 = 0,172 \text{ сек}.$$

Добротность системы по скорости

$$K = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = \frac{57,3 \cdot 2,5 \cdot 80 \cdot 2,6}{1000} \approx 100 \text{ сек}^{-1}.$$

Передачная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{100(1 + 0,14p)}{p(1 + 1,18p + 0,027p^2 + 0,00024p^3)}.$$

Раскладывая знаменатель последнего выражения на множители, передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в следующем виде:

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p(1 + T_3 p)(1 + 2\xi T_4 p + T_4^2 p^2)},$$

где $T_3 = 1,16 \text{ сек}$, $T_4 = 0,0145 \text{ сек}$ и $\xi = 0,8$.

Добротность по моменту

$$K_{\text{н}} = \frac{K n^2}{k_7} = \frac{100 \cdot 1000^2}{17,2} = 5,8 \cdot 10^6 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{рад}^{-1} = \\ = 1700 \text{ Г} \cdot \text{см} (\text{угл. мин})^{-1}.$$

§ 1.4. Структурные схемы и их преобразование

43. Преобразовать динамическое звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = k x_1. \quad (1)$$

во встречно-параллельное (с обратной связью) соединение консервативного и идеального дифференцирующего звеньев.

Решение. Преобразуем дифференциальное уравнение (1) к виду

$$x_2 = \frac{k}{T_2^2 p^2 + 1} x_1 - \frac{T_1 p}{T_2^2 p^2 + 1} x_2. \quad (2)$$

По уравнению (2) составим структурную схему (рис. 25, а), которая переносом сумматора, или элемента сравнения, и объединением двух последовательно соединенных звеньев преобразуется в искомую схему на рис. 25, б.

44. Найти передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(p)$ автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 26, а.

Решение. Освободимся от перекрестных связей в структурной схеме на рис. 26, а, для чего перенесем узел 1 через

звено W_3 по направлению действия сигнала (рис. 26, б). По полученной структурной схеме находим искомую передаточную функцию

$$\Phi(p) = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_2 W_3}.$$

45. Найти дифференциальное уравнение автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 26, а, относительно управляемой величины $y(t)$

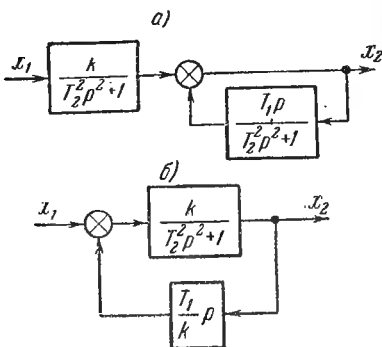


Рис. 25. Структурные схемы к задаче 43.

по задающему воздействию $g(t)$, если

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{p}, \quad W_3(p) = k_3.$$

Решение. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найдем

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{b_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2},$$

где $Y(p)$, $G(p)$ — изображения управляемой величины

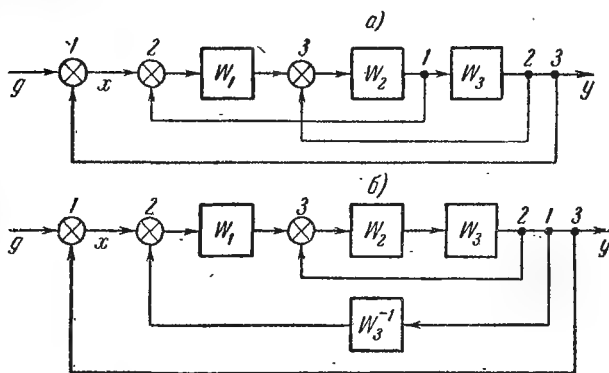


Рис. 26. Структурные схемы к задаче 44.

и задающего воздействия, $p = s + j\omega$ — комплексная переменная, $b_0 = k_1 k_3$, $a_0 = T_1 k_2^{-1}$, $a_1 = k_2^{-1} + k_3 T_1$, $a_2 = k_1 + k_3 + k_1 k_3$. Тогда искомое дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = b_0 g(t),$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — символ дифференцирования.

46. Найти дифференциальное уравнение автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 27, а, относительно управляемой величины $y(t)$ по возмущению $f(t)$, если

$$W_1(p) = k_1, \quad W_2(p) = \tau p, \quad W_3(p) = k_3, \quad W_4(p) = \frac{k_4}{T_1 p + 1},$$

$$W_5(p) = \frac{k_5}{T_2 p^2 + T_3 p + 1}.$$

Решение. Вначале получим передаточную функцию автоматической системы по возмущению $\Phi_f(p)$, для чего преобразуем структурную схему рис. 27, а. Перенесем сумматор 2 через звено W_5 и заменим W_1, W_2 одним

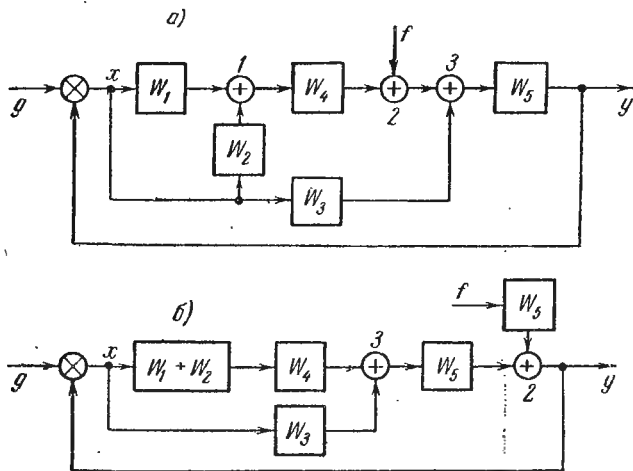


Рис. 27. Структурные схемы к задаче 46.

звеном (рис. 27, б). Найдем передаточную функцию разомкнутой системы по задающему воздействию

$$W(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = [(W_1 + W_2)W_4 + W_3]W_5$$

и по возмущению

$$W_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = W_5(p).$$

Тогда

$$\Phi_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} = \frac{d_0 p + d_1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3},$$

где $Y(p)$, $F(p)$ — изображения управляемой величины $y(t)$ и возмущения $f(t)$, $p = s + j\omega$ — комплексная переменная, $d_0 = k_5 T_1$, $d_1 = k_5$, $a_0 = T_1 T_2^2$, $a_1 = T_2^2 + T_1 T_3$, $a_2 = T_1 + T_3 + k_4 k_5 \tau + k_3 k_5 T_1$, $a_3 = 1 + k_3 k_5 + k_1 k_4 k_5$.

Отсюда искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = (d_0 p + d_1) f(t), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

47. Найти следующие передаточные функции автоматической системы, структурная схема которой

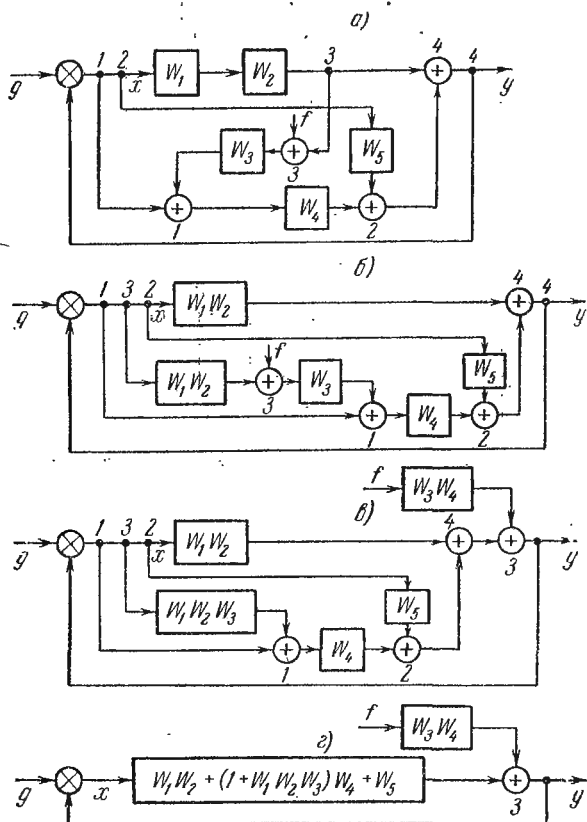


Рис. 28. Структурные схемы к задаче 47.

изображена на рис. 28, а: разомкнутой системы по задающему воздействию $W(p)$ и по возмущению $W_f(p)$;

основную $\Phi(p)$, по возмущению $\Phi_f(p)$ и относительно ошибки по задающему воздействию $\Phi_x(p)$.

Решение. Преобразуем структурную схему рис. 28, а (см. рис. 28, б, в и г). По структурной схеме рис. 28, г найдем

$$W(p) = W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5, \quad W_f(p) = W_3 W_4,$$

$$\Phi(p) = \frac{W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5}{1 + W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5},$$

$$\Phi_f(p) = \frac{W_3 W_4}{1 + W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5},$$

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5}.$$

48. Найти дифференциальные уравнения автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 28, а, относительно управляемой величины $y(t)$ по задающему воздействию $g(t)$ и по возмущению $f(t)$, а также относительно ошибки $x(t)$ по задающему воздействию $g(t)$ и по возмущению $f(t)$, если $W_1(p) = k_1$,

$$W_2(p) = \frac{k_2}{T_1 p + 1}, \quad W_3(p) = k_3, \quad W_4(p) = \frac{k_4}{p}, \quad W_5(p) = \frac{k_5}{p(T_2 p + 1)}.$$

Ответ.

$$D(p) y(t) = (b_0 p^2 + b_1 p + b_2) g(t),$$

$$D(p) y(t) = (d_0 p^2 + d_1 p + d_2) f(t),$$

$$D(p) x(t) = (c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p) g(t),$$

$$D(p) x(t) = -(d_0 p^2 + d_1 p + d_2) f(t),$$

где характеристический полином системы

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3; \quad a_0 = c_0, \quad a_1 = b_0 + c_1,$$

$$a_2 = b_1 + c_2, \quad a_3 = b_2; \quad b_0 = k_1 k_2 k_4^{-1} T_2 + T_1 T_2,$$

$$b_1 = k_1 k_2 k_4^{-1} + T_1 + T_2 + k_1 k_2 k_3 T_2 + k_5 k_4^{-1} T_1,$$

$$b_2 = 1 + k_1 k_2 k_3 + k_5 k_4^{-1};$$

$$c_0 = k_4^{-1} T_1 T_2, \quad c_1 = k_4^{-1} (T_1 + T_2), \quad c_2 = k_4^{-1};$$

$$d_0 = k_3 T_1 T_2, \quad d_1 = k_3 (T_1 + T_2), \quad d_2 = k_3; \quad p = \frac{d}{dt}.$$

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 2.1. Характеристики динамических звеньев

49. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с отрицательной полуосью мнимых чисел (рис. 29, а).

50. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p^2}.$$

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с отрицательной полуосью вещественных чисел (рис. 29, б).

51. Построить амплитудно-фазовую характеристику цепи RC , представленной на рис. 30, а; $R = 1$ ком, $C = 10$ мкф.

Решение. Частотная передаточная функция цепи равна

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}, \quad (1)$$

где

$$T = RC = 10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{-2} \text{ сек.}$$

Преобразуем выражение (1) таким образом, чтобы оно представляло собой комплексное число в

алгебраической форме:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{10^{-4} \omega^2}{1 + 10^{-4} \omega^2} + j \frac{10^{-2} \omega}{1 + 10^{-4} \omega^2}. \quad (2)$$

Задаваясь отдельными значениями ω , можно по формуле (2) вычислить ряд пар значений $U(\omega)$ и $V(\omega)$

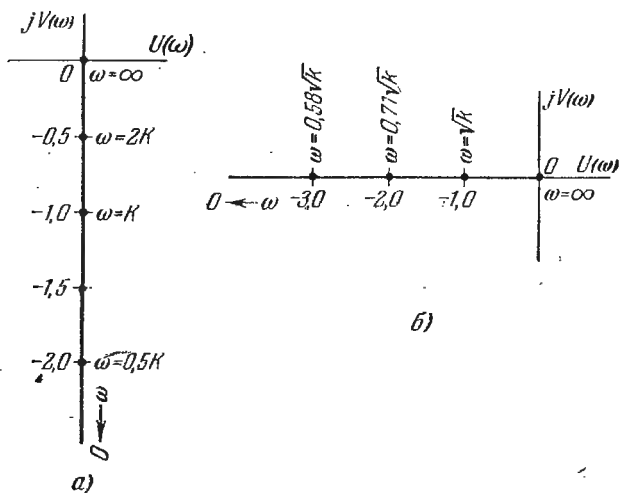


Рис. 29. Амплитудно-фазовые характеристики интегрирующих звеньев первого порядка (а) и второго порядка (б).

и построить по ним амплитудно-фазовую характеристику цепи.

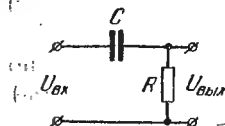
Однако анализ выражения (2) показывает, что эта характеристика определяется уравнением

$$V^2 + (U - 0,5)^2 = 0,5^2$$

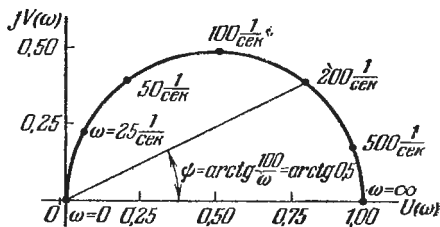
и для положительных частот является полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости с центром в точке $(0,5; j0)$ и радиусом 0,5 (рис. 30, б).

Из выражения (2) видно, что при $\omega = 0$ $W(j\omega) = 0 + j0$, а при $\omega = \infty$ $W(j\omega) = 1 + j0$. Точки, соответ-

ствующие этим, а также некоторым промежуточным частотам, указаны на рис. 30, б; значения частоты на этом и всех последующих рисунках даны в рад/сек.



а)



б)

Рис. 30. Амплитудно-фазовая характеристика дифференцирующего звена (случай 1).

Частоты, соответствующие промежуточным точкам кривой, могут быть найдены следующим образом.

Аргумент комплексного числа (2) равен

$$\psi = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{1}{\omega T} = \arctg \frac{100}{\omega}, \quad (3)$$

поэтому луч, проведенный из начала координат под углом ψ к оси абсцисс, пересекает амплитудно-фазовую характеристику в точке, в которой величина ω определяется через ψ согласно (3). Один такой луч показан на рисунке.

52. Построить амплитудно-фазовую характеристику аperiodического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp} = \frac{5}{1 + 0,1p}.$$

Ответ. См. рис. 31 (а. ф. х. представляет собой полуокружность).

53. Найти уравнение кривой, представляющей собой амплитудно-фазовую характеристику дифференцирующего звена.

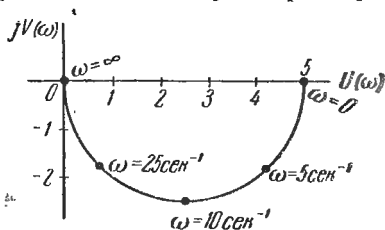


Рис. 31. Амплитудно-фазовая характеристика аperiodического звена первого порядка.

щего звена, изображенного на рис. 32, а. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена для случая $R_1 = 40 \text{ ком}$, $R_2 = 10 \text{ ком}$, $C = 2,5 \text{ мкф}$.

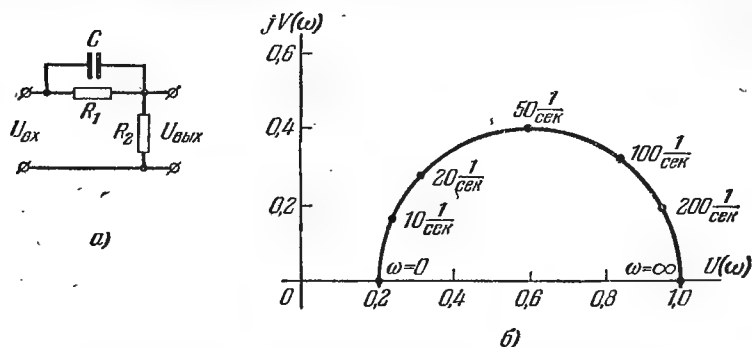


Рис. 32. Амплитудно-фазовая характеристика дифференцирующего звена (случай 2).

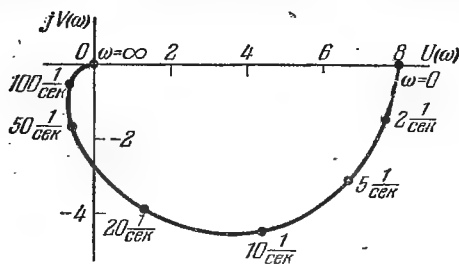


Рис. 33. Амплитудно-фазовая характеристика аperiodического звена второго порядка.

Ответ. Уравнение кривой имеет вид

$$V^2 + \left(U - \frac{1+\rho}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-\rho}{2} \right)^2, \quad (1)$$

где

$$\rho = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Согласно (1) амплитудно-фазовая характеристика является для положительных частот полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости, с центром

в точке $\left(\frac{\rho+1}{2}, j0\right)$ и радиусом $\frac{1-\rho}{2}$. Эта характеристика построена для указанных данных на рис. 32, б.

54. Построить амплитудно-фазовую характеристику апериодического звена второго порядка с передаточной функцией $W(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$, если $K=8$, $T_1=80$ мсек, $T_2=12$ мсек.

Ответ. См. рис. 33.

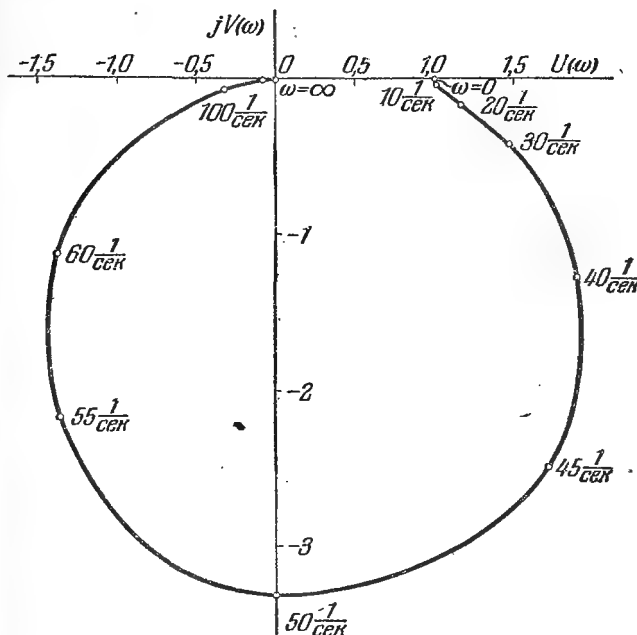


Рис. 34. Амплитудно-фазовая характеристика колебательного звена.

55. Построить амплитудно-фазовую характеристику колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2},$$

при $k=1$; $\xi=0,15$, $T=0,02$ сек.

Ответ. См. рис. 34.

56. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)},$$

$k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T = 0,25 \text{ сек}$.

Ответ. См. рис. 35; штриховой линией показана асимптота, к которой стремится а. ф. х. при $\omega \rightarrow 0$.

57. Построить логарифмические амплитудную $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ и фазовую $\varphi(\omega)$ характеристики апериодического звена с передаточной функцией

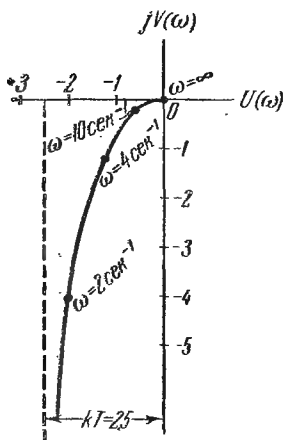


Рис. 35. Амплитудно-фазовая характеристика последовательного соединения интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка.

Асимптотическая л. а. х. имеет согласно (2) излом в точке, где $\omega T = 1$. Слева от излома она горизонтальна и расположена на высоте $20 \lg k$, справа от излома она имеет наклон -20 дб/дек . Точка пересечения характеристики с осью частот, т. е. частота ω_c среза, определяется из условия

$$L(\omega_c) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega_c T} = 0 \quad \text{или} \quad \omega_c = \frac{k}{T}.$$

$$W(p) = \frac{k}{1+Tp} \quad (1)$$

для двух случаев: а) в виде, пригодном для любых k и T ; б) для $k = 100$, $T = 50 \text{ мсек}$.

Решение. Логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая выражению (1), равна

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}. \quad (2)$$

Асимптотическая логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая (2), построена на рис. 36, а; по оси абсцисс отложена величина ωT в логарифмическом масштабе, по оси ординат $-L(\omega)$ в децибелах.

Наибольшее отклонение асимптотической характеристики от точной имеет место при $\omega T = 1$ и составляет, как можно найти из выражения (2), 3 дБ. При $\omega T = 0,5$

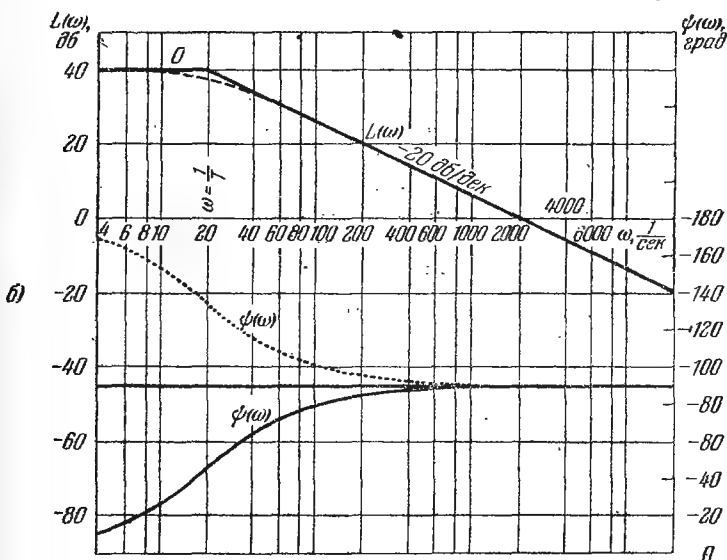
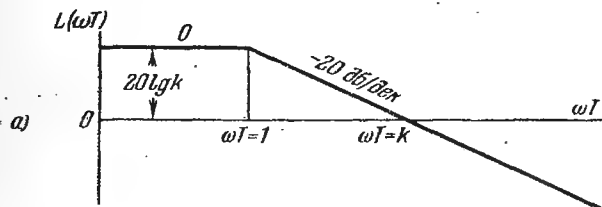


Рис. 36. Логарифмические характеристики устойчивого и неустойчивого апериодических звеньев к задачам 57 и 58.

и $\omega T = 2$ отклонение асимптотической характеристики от точной равно примерно 1 дБ, а за пределами участка $\omega T = 1 \pm 1$ октава это отклонение ничтожно мало.

Фазовая характеристика звена определяется согласно (1) выражением

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\arctg \omega T. \quad (3)$$

В области низких частот $\psi(\omega) \rightarrow 0$, в области высоких частот $\psi(\omega) \rightarrow -90^\circ$; при $\omega T = 1$ $\psi(\omega) = -45^\circ$. Из выражения (3) следует также, что фазовая характеристика симметрична относительно точки $\omega T = 1$, $\psi = -45^\circ$.

Фазовая характеристика апериодического звена с передаточной функцией (1) построена согласно (2) в виде $\psi(\omega T)$ в приложении 3.

При построении использована следующая таблица:

ωT	0	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	∞
$\psi(\omega T),$ град	0	$-2^\circ 50'$	$-5^\circ 40'$	$-11^\circ 20'$	$-26^\circ 30'$	-45	$-63^\circ 30'$	$-78^\circ 40'$	$-84^\circ 20'$	$-87^\circ 10'$	-90°

Логарифмические амплитудная и фазовая характеристики звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{100}{1 + 0,05p} \quad (4)$$

построены на рис. 36, б; штриховой линией показана точная амплитудная характеристика в части, где она не совпадает с асимптотической, построенной согласно формуле (2). По оси абсцисс отложена частота ω в логарифмическом масштабе, по оси ординат — децибелы и градусы.

58. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики неустойчивого апериодического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{100}{-1 + 0,05p}.$$

Ответ. Амплитудная характеристика $L(\omega)$ та же, что и для устойчивого звена с передаточной функцией (4) в предыдущей задаче (см. рис. 36, б).

Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ дана на рис. 36, б пунктирной кривой.

59. Передаточная функция динамического звена равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)}.$$

Построить логарифмические амплитудную $L(\omega)$ и фазовую $\psi(\omega)$ характеристики звена при $K = 400 \text{ сек}^{-1}$ для трех случаев: 1) $T = 25 \text{ мсек}$, 2) $T = 5 \text{ мсек}$, 3) $T = 2,5 \text{ мсек}$.

Указание. При построении фазовой характеристики целесообразно использовать приложение 3.

Ответ. См. рис. 37; индекс при $L(\omega)$ и $\psi(\omega)$ означает номер случая. Для первого случая ($T = 25 \text{ мсек}$) пунктиром показана точная амплитудная характеристика.

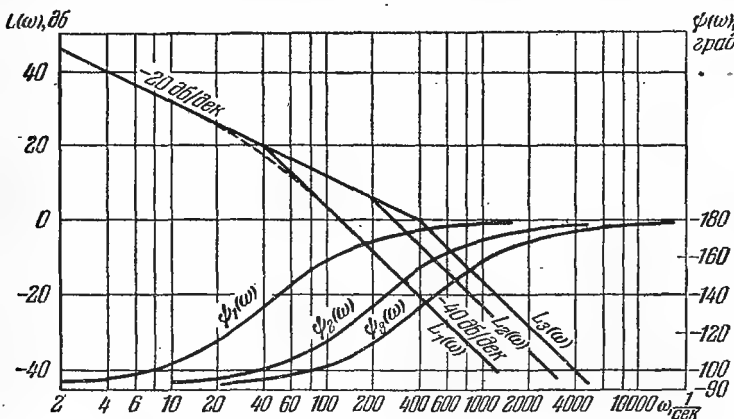


Рис. 37. Логарифмические характеристики к задаче 59.

60. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{(1 + Tp)^2} = \frac{300}{(1 + 0,025p)^2}.$$

Ответ. См. рис. 38. Из рисунка видно, что при вычерчивании логарифмических характеристик не обязательно строить логарифмическую сетку частот, достаточно лишь сделать соответствующие отметки на оси частот.

Для нанесения этих отметок обычно используется шкала логарифмической линейки; удобный масштаб имеет шкала кубов малой логарифмической линейки.

61. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики колебательного звена с переда-

точной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\xi Tp + T^2 p^2}. \quad (1)$$

Рассмотреть случаи:

- 1) характеристики $L(\omega T)$ и $\varphi(\omega T)$ при $k=1$ и $\xi=0,05$; 0,10; ...; 0,8; 1,0;
- 2) характеристики $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при $k=30$, $\xi=0,2$, $T=50$ мсек.

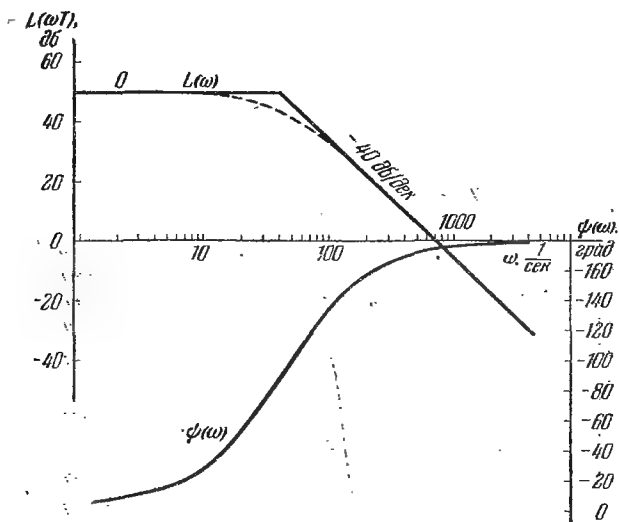


Рис. 38. Логарифмические характеристики к задаче 60.

Решение. 1) Частотная передаточная функция, соответствующая (1) при $k=1$, равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega}. \quad (2)$$

Из (2) находим логарифмическую амплитудную характеристику

$$L(\omega T) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + 4\xi^2 (T\omega)^2}} \quad (3)$$

и логарифмическую фазовую характеристику:

$$\psi(\omega T) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - (\omega T)^2}. \quad (4)$$

По формулам (3) и (4) строим амплитудную и фазовую характеристики, задаваясь различными значениями ξ

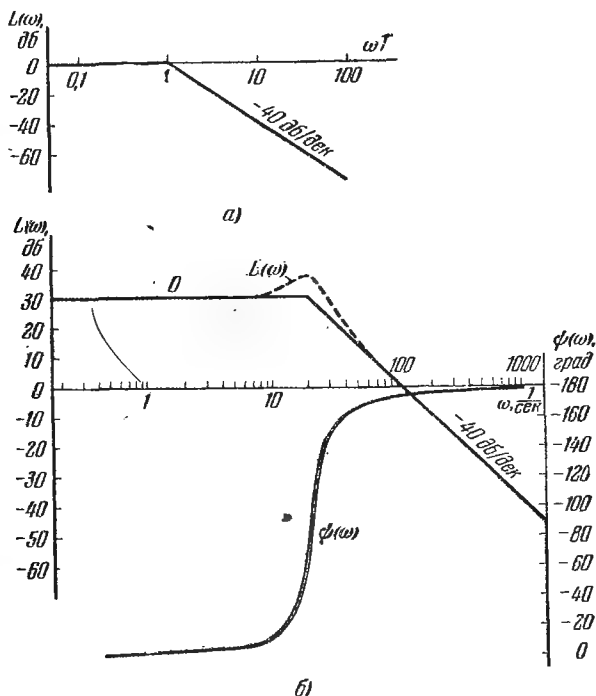


Рис. 39. Логарифмические характеристики колебательного звена.

от 0,05 до 1,0. Эти характеристики приведены в приложении 4.

Амплитудная характеристика (3) имеет две асимптоты:

$$\left. \begin{aligned} L'(\omega T) &= 20 \lg 1 = 0 & \text{при } \omega T \leq 1 \\ L''(\omega T) &= -20 \lg (\omega T)^2 & \text{при } \omega T \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Асимптотическая амплитудная характеристика, определяемая выражениями (5), построена на рис. 39, а.

Для колебательного звена асимптотическая амплитудная характеристика может очень отличаться от точной, что следует из сравнения рис. 39, а с рисунком, приведенным в приложении 5. Поэтому для колебательного звена обычно строится точная амплитудная характеристика. Это построение удобно проводить, суммируя

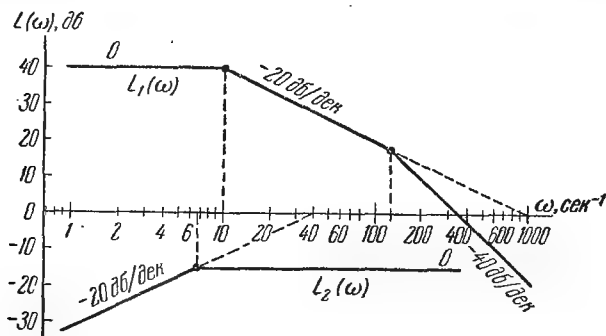


Рис. 40. Логарифмические амплитудные характеристики к задаче 63.

ординаты асимптотической характеристики с ординатами кривой отклонения $\Delta L(\omega)$ асимптотической характеристики от точной; такая кривая дана в приложении 5.

2) Характеристики $L(\omega)$ и $\psi(\omega)$ для звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{30}{1 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,05p + 0,0025p^2} = \frac{30}{1 + 0,02p + 0,0025p^2}, \quad (6)$$

построенные с использованием приложений 4 и 5, приведены на рис. 39, б.

62. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики неустойчивого колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 - 2\xi T p + T^2 p^2}$$

при $k = 30$, $T = 50$ мсек, $\xi = 0,2$.

Ответ. Амплитудная характеристика совпадает с $L(\omega)$ устойчивого колебательного звена в предыдущей задаче, имеющего передаточную функцию (6) (см. рис. 39, б). Фазовая характеристика отличается от $\psi(\omega)$ для звена с передаточной функцией (6) только знаком.

63. На рис. 40 изображены асимптотические логарифмические амплитудные характеристики минимально-фазовых звеньев. Найти передаточные функции этих звеньев.

Ответ.

$$W_1(p) = \frac{k}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}, \quad k = 100, T_1 = 100 \text{ мсек}, T_2 = 8 \text{ мсек};$$

$$W_2 = \frac{k p}{1 + T p}, \quad k = 0,025 \text{ сек}, \quad T = 0,15 \text{ сек}.$$

§ 2.2. Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых систем автоматического регулирования

64. Система автоматического регулирования имеет структурную схему, показанную на рис. 41; ЧЭ — чувствительный элемент, Д — двигатель, Р — редуктор. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Построить амплитудно-фазовую характеристику системы при $K = 400 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 80 \text{ мсек}$, $T_2 = 12 \text{ мсек}$.

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика может быть построена по приведенным в таблице значениям модуля $A(\omega)$ и аргумента $\psi(\omega)$ частотной передаточной функции $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi(\omega)}$.

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	2	5	10	20	50	100	300	∞
$A(\omega)$	∞	196	74	31	10,3	1,66	0,319	0,015	0
$\psi(\omega), \text{град}$	-90	-100	-115	-135	-162	-197	-223	-252	-270

65. Система автоматического регулирования имеет структурную схему, показанную на рис. 41. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}. \quad (1)$$

Найти такой способ изображения амплитудно-фазовых

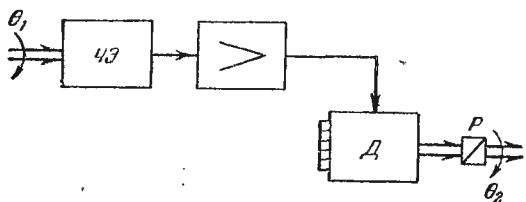


Рис. 41. Структурная схема к задачам 64 и 65.

характеристик, который позволил бы охватить случаи различных сочетаний параметров K , T_1 , T_2 системы.

Решение. Представим выражение (1) в виде

$$W(p) = \frac{KT_1}{T_1 p (1 + T_1 p) (1 + a T_1 p)}, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{T_2}{T_1}.$$

Частотная передаточная функция, соответствующая выражению (2), имеет вид

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{KT_1}{jT_1\omega (1 + jT_1\omega) (1 + jaT_1\omega)} = KT_1 W_0(jT_1\omega) = \\ &= KT_1 U_0(T_1\omega) + jKT_1 V_0(T_1\omega). \end{aligned} \quad (3)$$

Задавшись последовательностью близких друг к другу значений $a = T_2/T_1$ от $a = 0$ до $a = 1$, можно построить семейство амплитудно-фазовых характеристик, практически охватывающих все возможные варианты систем с передаточной функцией (1).

На рис. 42 построено семейство подобных амплитудно-фазовых характеристик для $a = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. Построение выполнено на основе выражения (3) по его модулю и аргументу для различных значений частоты;

по осям координат отложены величины

$$U_0(\omega) = (KT_1)^{-1} U(\omega) \quad \text{и} \quad V_0(\omega) = (KT_1)^{-1} V(\omega).$$

Переход к характеристике, соответствующей определенному значению KT_1 , осуществляется умножением чисел, отложенных по осям координат, на величину KT_1 .

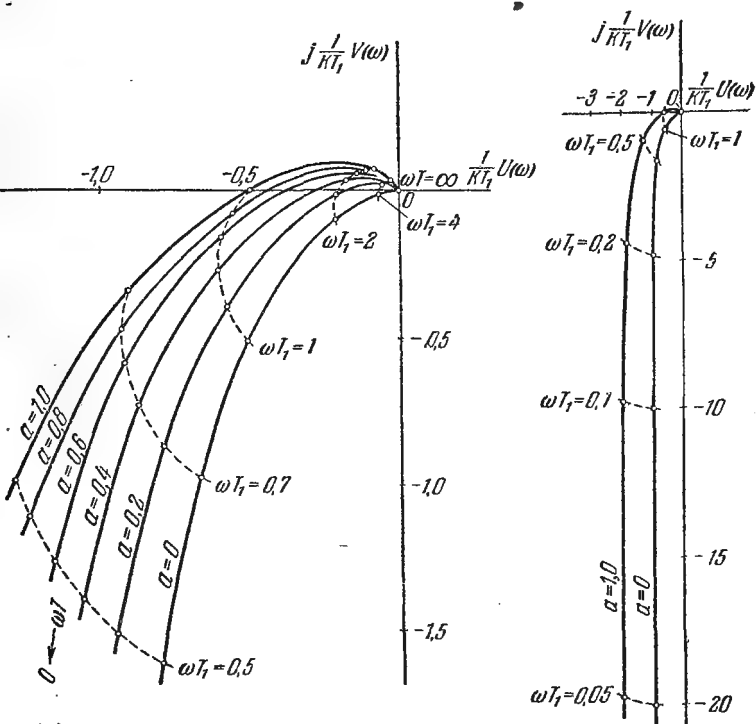


Рис. 42. Универсальные амплитудно-фазовые характеристики к задаче 65.

Интерполирование позволяет легко получить амплитудно-фазовые характеристики систем, для которых величины $a = T_2/T_1$ отличаются от приведенных на рис. 42.

66. Построить амплитудно-фазовые характеристики двух систем, имеющих в разомкнутом состоянии

передаточные функции:

$$a) \quad W_1(p) = \frac{20}{p(1 + 0,1p)},$$

$$б) \quad W_2(p) = \frac{200}{p(1 + 0,05p)(1 + 0,02p)}.$$

Указание. Возможно использование готовых кривых из предыдущей задачи.

Ответ. См. рис. 43.

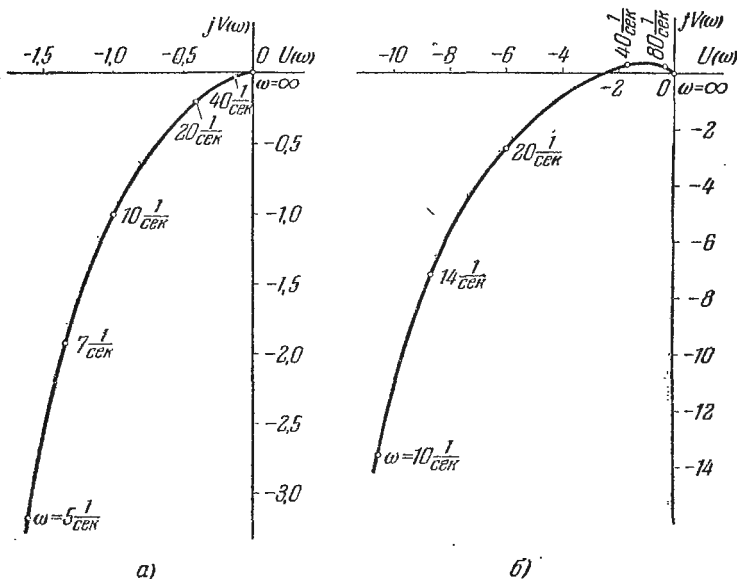


Рис. 43. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 66:

а) кривая для первой системы, б) для второй системы.

67. Построить амплитудно-фазовую характеристику системы, блок-схема которой дана на рис. 44; ЧЭ — чувствительный элемент, Д — двигатель, Р — редуктор. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}.$$

Ответ. См. рис. 45.

68. Найти уравнение кривой, представляющей собой амплитудно-фазовую характеристику системы, имеющей

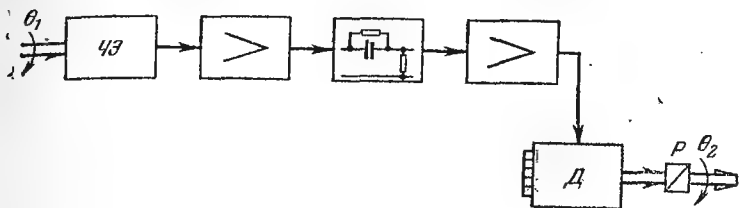


Рис. 44. Блок-схема к задаче 67.

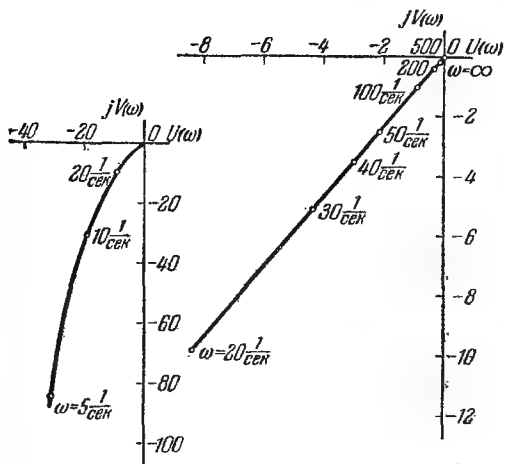


Рис. 45. Амплитудно-фазовая характеристика к задаче 67.

следующую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p^2}.$$

Построить амплитудно-фазовую характеристику для случая $K = 100 \text{ сек}^{-2}$ и $T = 0,2 \text{ сек}$.

Решение. Частотная передаточная функция равна

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + jT\omega)}{-\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = -\frac{K}{\omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{KT}{\omega}. \quad (1)$$

Из (1) находим

$$U = -\frac{1}{KT^2} V^2. \quad (2)$$

Согласно (1) и (2) амплитудно-фазовая характеристика представляет собой для положительных частот ветвь параболы, лежащую в третьем квадранте комплексной плоскости.

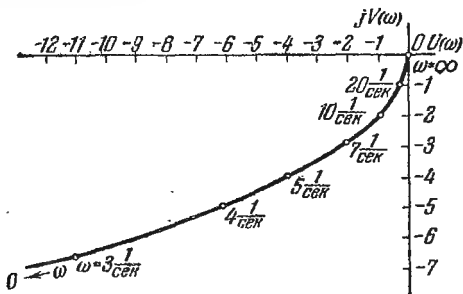


Рис. 46. А. ф. х. в виде параболы к задаче 68.

Точка амплитудно-фазовой характеристики, соответствующая какому-либо значению частоты ω , легко определяется как точка пересечения параболы с лучом, проведенным из начала координат и составляющим с осью вещественных чисел угол

$$\psi = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\pi + \arctg \omega T.$$

Амплитудно-фазовая характеристика для заданных параметров построена на рис. 46.

69. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K(1 + 0,15p)}{p^2(1 + 0,05p)^2}.$$

Построить ее амплитудно-фазовую характеристику при $K = 50 \text{ сек}^{-2}$ и $K = 200 \text{ сек}^{-2}$.

Ответ. См. рис. 47.

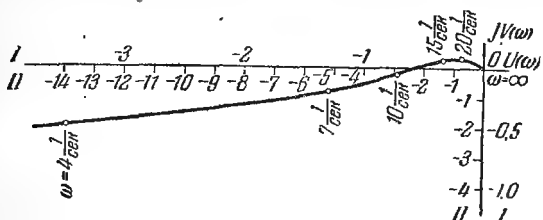


Рис. 47. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 69. Шкала I — для $K=50$, шкала II — для $K=200$.

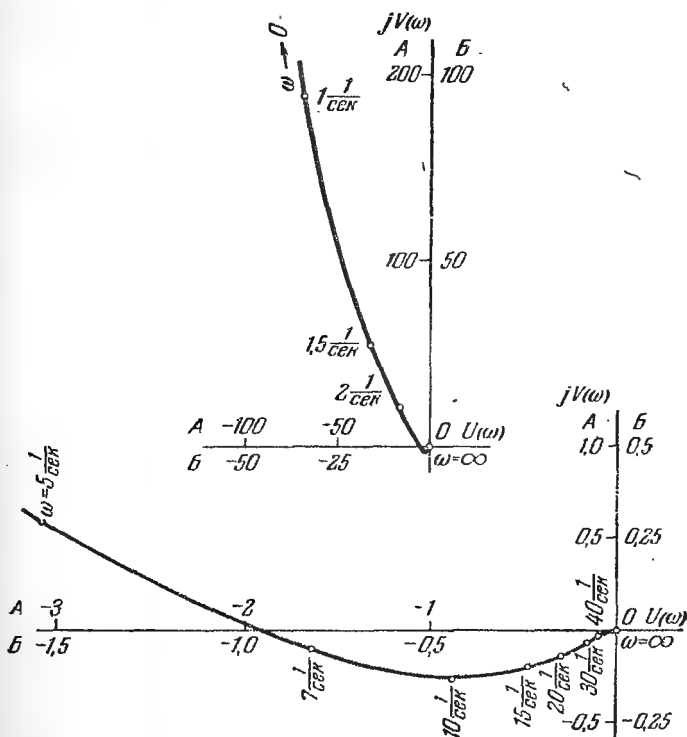


Рис. 48. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 70. Шкала A — для $K=200 \text{ сек}^{-3}$, шкала B — для $K=100 \text{ сек}^{-3}$.

70. Построить амплитудно-фазовую характеристику системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{K(1 + 0,2p)^2}{p^3(1 + 0,04p)}$$

при $K = 200 \text{ сек}^{-3}$ и $K = 100 \text{ сек}^{-3}$.

Ответ. См. рис. 48.

71. На рис. 49 приведена цепь тахометрической обратной связи с пассивными корректирующими контурами;

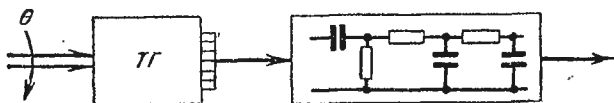


Рис. 49. Схема к задаче 71.

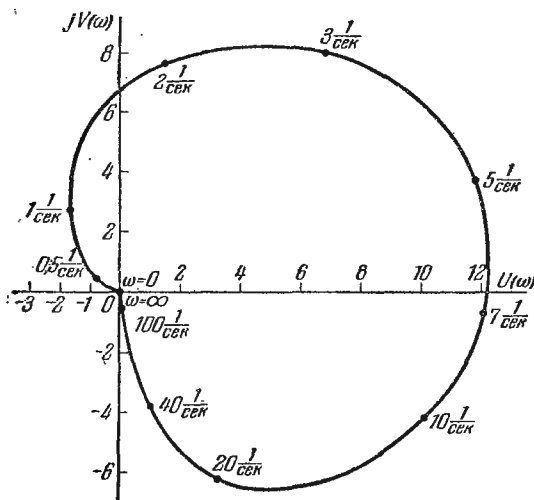


Рис. 50. А. ф. х. цепи тахометрической обратной связи к задаче 71.

ТГ — тахогенератор. Построить амплитудно-фазовую характеристику этой цепи, если ее передаточная

функция равна

$$W(p) = \frac{Kp^2}{(1 + T_1 p)^2 (1 + T_2 p)},$$

$K = 4 \text{ в} \cdot \text{сек}^2 / \text{град}$, $T_1 = 0,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,1 \text{ сек}$.

Ответ. См. рис. 50, где числа, отложенные вдоль осей, имеют размерность $\text{в} / \text{град}$.

72. Построить амплитудно-фазовую характеристику цепи с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(-1 + Tp)} = \frac{100}{p(-1 + 0,1p)}.$$

Ответ. См. рис. 51.

73. Построить амплитудно-фазовые характеристики систем с передаточными функциями

$$(A) \quad W(p) =$$

$$= \frac{K}{(-1 + 2T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + T_2 p)},$$

$$(B) \quad W(p) =$$

$$= \frac{K(1 + T_3 p)}{(-1 + 2T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + T_2 p)(1 + T_4 p)}$$

для случая $K = 5$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $T_2 = 0,05 \text{ сек}$, $T_3 = 0,03 \text{ сек}$, $T_4 = 0,006 \text{ сек}$.

Ответ. См. рис. 52.

74. Блок-схема системы гироскопической стабилизации, разомкнутой на входе датчика угла прецессии, может быть представлена [4, 5] в виде, показанном на рис. 53; ДУП — датчик угла прецессии, Д — двигатель, Р — редуктор, Г — гироскоп. Передаточная функция разомкнутой системы может быть при безынерционном

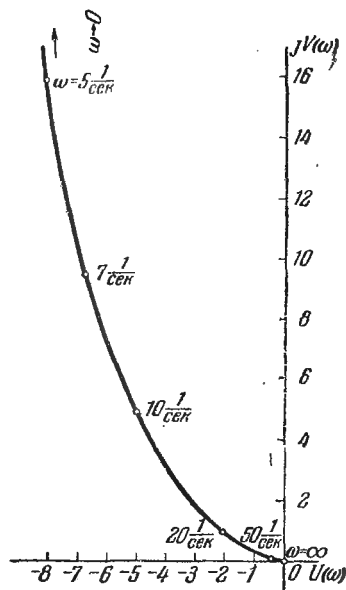


Рис. 51. А. ф. х. системы с неустойчивым звеном.

усилителе записана в виде

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_p + T_p^2 p^2)}.$$

Построить амплитудно-фазовую характеристику этой системы при $K = 20 \text{ сек}^{-1}$; $\xi = 0,15$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$.

Ответ. См. кривую А на рис. 54.

75. Система гироскопической стабилизации, блок-схема которой дана на рис. 53 (см. также задачу 74), имеет при инерционном усилителе следующую передаточную функцию в разомкнутом состоянии:

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + 2\xi T_2 p + T_2^2 p^2)}.$$

Построить амплитудно-фазовую характеристику этой системы при $K = 20 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,2 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$, $\xi = 0,15$.

Ответ. См. кривую Б на рис. 54.

§ 2.3. Вещественные частотные характеристики замкнутых систем автоматического регулирования

76. Построить вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ замкнутой системы автоматического регулирования. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_p)}, \quad (1)$$

$K = 20 \text{ сек}^{-1}$, $T = 0,1 \text{ сек}$.

Решение. Вещественная частотная характеристика строится по точкам. Эти точки могут быть найдены различными способами.

а) Вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ может быть построена по ее аналитическому выражению

$$P(\omega) = \text{Re} [\Phi(j\omega)], \quad (2)$$

где $\Phi(j\omega)$ — частотная передаточная функция замкнутой системы, равная

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}. \quad (3)$$

Согласно (3) и (1) получаем

$$\Phi(j\omega) = \frac{K(K - T\omega^2)}{(K - T\omega^2)^2 + \omega^2} - j \frac{K\omega}{(K - T\omega^2)^2 + \omega^2}. \quad (4)$$

Из (4) и (2) находим

$$P(\omega) = \frac{K(K - T\omega^2)}{(K - T\omega^2)^2 + \omega^2} = \frac{20(20 - 0,1\omega^2)}{(20 - 0,1\omega^2)^2 + \omega^2}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) различные значения ω , получаем табл. 1 для построения $P(\omega)$:

Т а б л и ц а 1

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	5	7	10	15	18	20	25	30	40	50	60	∞
$P(\omega)$	1,00	1,06	1,08	1,00	-0,23	-0,25	-0,50	-0,35	-0,24	-0,15	-0,08	-0,06	0

По данным табл. 1 на рис. 55, а построена вещественная частотная характеристика.

б) Если для ряда значений частоты ω имеются координаты $U(\omega)$ и $V(\omega)$ точек амплитудно-фазовой

Т а б л и ц а 2

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	5	7	10	20	40	∞
$U(\omega)$	$-\infty$	-1,60	-1,34	-1,00	-0,41	-0,13	0
$V(\omega)$	$-\infty$	-3,18	-1,93	-1,00	-0,21	-0,02	0

характеристики разомкнутой системы (табл. 2), то соответствующие значения $P(\omega)$ можно найти по формуле

$$P(\omega) = \frac{U^2(\omega) + V^2(\omega) + U(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)}. \quad (6)$$

В случае, когда координаты точек амплитудно-фазовой характеристики заданы в виде модуля $A(\omega)$ и аргумента $\psi(\omega)$ (табл. 3) частотной передаточной функции $W(j\omega)$, характеристика $P(\omega)$ может быть построена по формуле

$$P(\omega) = \frac{A^2(\omega) + A(\omega) \cos \psi(\omega)}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \psi(\omega) + 1}, \quad (7)$$

Таблица 3

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	5	7	10	20	30	40	50	60	∞
$A(\omega)$	∞	3,56	2,34	1,41	0,448	0,211	0,121	0,078	0,054	0
$\psi(\omega), \text{град}$	-90	-116	-125	-135	-154	-162	-166	-169	-170	-180

получаемой из формулы (6) при подстановке

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) = A^2(\omega) \quad \text{и} \quad U(\omega) = A(\omega) \cos \psi(\omega).$$

в) Если имеется амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, то для построения $P(\omega)$ удобно использовать формулу

$$P(\omega) = \frac{A^2(\omega) + U(\omega)}{B^2(\omega)}, \quad (8)$$

получающуюся из (6) при подстановке $A^2(\omega) = U^2(\omega) + V^2(\omega)$ и $B^2(\omega) = [1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)$. Величины $A(\omega)$

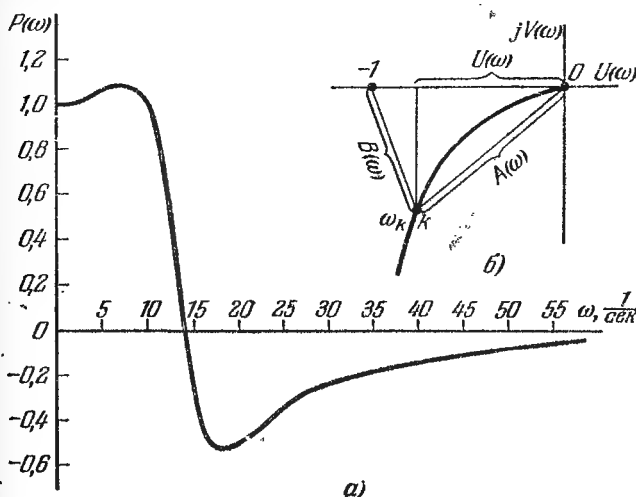


Рис. 55. Вещественная частотная характеристика к задаче 76.

и $B(\omega)$ для каждой заданной частоты ω легко получить из амплитудно-фазовой характеристики, так как $A(\omega)$

представляет собой модуль вектора $W(j\omega)$, т. е. расстояние от начала координат до заданной точки k характеристики, а $B(\omega)$ — расстояние от точки $(-1, j0)$ до точки k (рис. 55).

Числа, входящие в формулу (8) и необходимые для построения вещественной частотной характеристики, приведенной на рис. 55, a , можно получить из амплитудно-фазовой характеристики системы с передаточной функцией (1), изображенной на рис. 43, a .

г) Для построения вещественной частотной характеристики системы по имеющейся амплитудно-фазовой характеристике (рис. 43, a) можно воспользоваться номограммой, называемой вещественной круговой диаграммой. Такая номограмма дана в приложении 11.

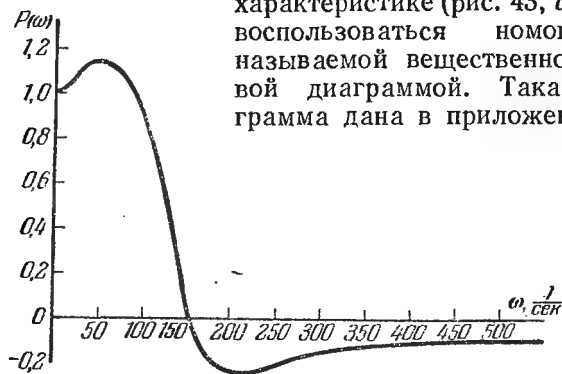


Рис. 56. Вещественная частотная характеристика к задаче 77.

77. Построить вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ замкнутой системы автоматического регулирования, если передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}$.

Таблица 4

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	10	20	30	40	50	100	200	500	∞
$A(\omega)$	∞	36,8	13,0	6,85	4,6	3,38	1,35	0,488	0,095	0
$\varphi(\omega), \text{град}$	-90	-122	-130	-130	-130	-130	-133	-136	-165	-180

При построении $P(\omega)$ может быть использована амплитудно-фазовая характеристика системы, приведенная на рис. 45, либо табл. 4 величин модуля $A(\omega)$ и аргумента $\psi(\omega)$ частотной передаточной функции системы.

Ответ. См. рис. 56 и задачу 76.

78. Построить вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ замкнутой системы. Амплитудно-фазовая

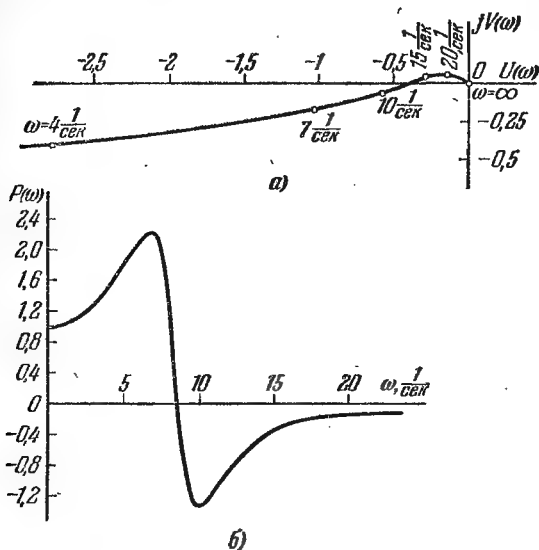


Рис. 57. Амплитудно-фазовая и вещественная частотная характеристики к задаче 78.

характеристика разомкнутой системы дана на рис. 57, а. При построении могут быть использованы данные табл. 5.

Ответ. См. рис. 57, б и задачу 76.

Таблица 5

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	2	4	7	10	15	20	∞
$A(\omega)$	∞	10,32	2,80	1,05	0,58	0,28	0,16	0
$\psi(\omega), \text{град}$	-180	-175	-172	-172	-177	-188	-199	-180

79. Построить вещественную частотную характеристику замкнутой статической системы. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы дана в виде кривой B на рис. 52.

Ответ. См. рис. 58 и задачу 76.

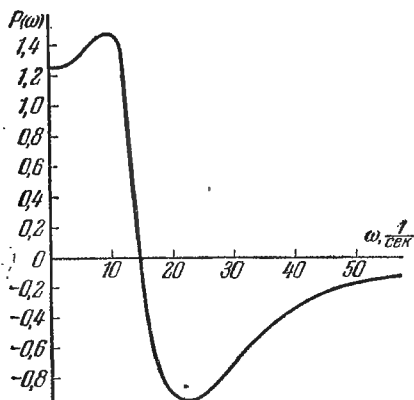


Рис. 58. Вещественная частотная характеристика к задаче 79.

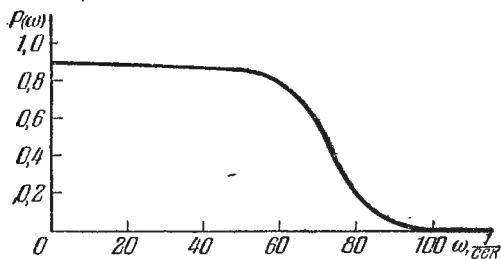


Рис. 59. Вещественная частотная характеристика к задаче 80.

80. Построить вещественную частотную характеристику замкнутой статической системы. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы совпадает с приведенной на рис. 33.

Ответ. См. рис. 59 и задачу 76.

81. Построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы с астатизмом третьего порядка.

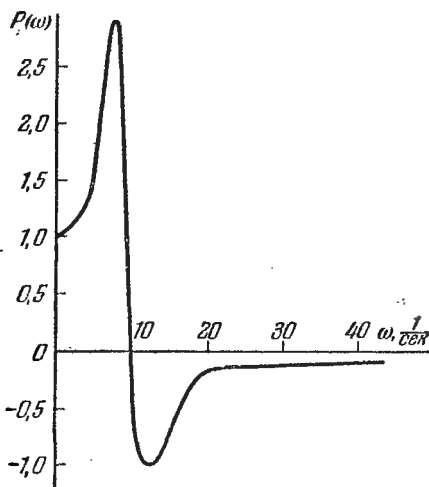


Рис. 60. Вещественная частотная характеристика к задаче 81.

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы дана на рис. 48 (шкалы с буквой A).

Ответ. См. рис. 60 и задачу 76.

§ 2.4. Логарифмические характеристики систем автоматического регулирования

82. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{40}{1 + 0,12p + 0,002p^2}. \quad (1)$$

Решение. Для построения логарифмических характеристик следует разложить знаменатель (1) на два сомножителя.

Для этого определяем корни знаменателя, которые оказываются равными -10 сек^{-1} и -50 сек^{-1} , и представляем (1) в виде

$$W(p) = \frac{40}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{40}{(1 + 0,1p)(1 + 0,02p)}. \quad (2)$$

Отсюда находим логарифмическую амплитудную характеристику системы

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{40}{(1 + j0,1\omega)(1 + j0,02\omega)} \right| = \\ = 20 \lg \frac{40}{\sqrt{[1 + (0,1\omega)^2][1 + (0,02\omega)^2]}}. \quad (3)$$

Из выражений (2) или (3) следует, что асимптотическая л. а. х. имеет два излома; в точках $\omega_1 = 1/T_1 =$

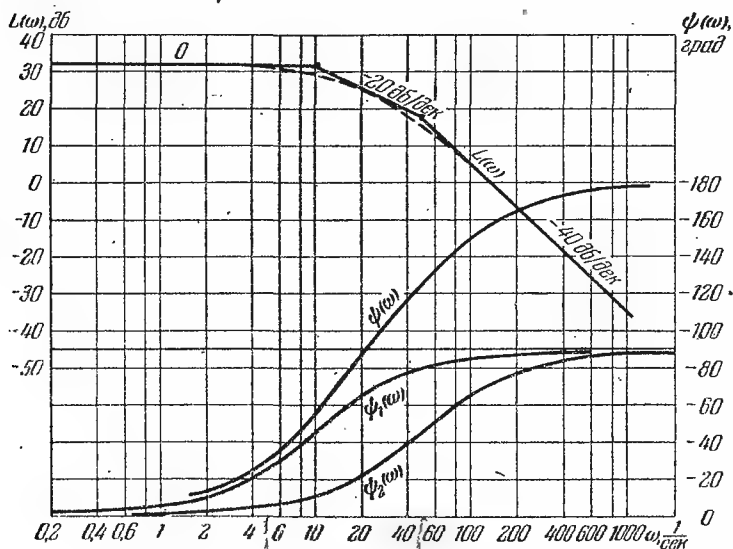


Рис. 61. Логарифмические характеристики к задаче 82.

$= 10 \text{ сек}^{-1}$ и $\omega_2 = 1/T_2 = 50 \text{ сек}^{-1}$ и состоит из трех участков: горизонтального, проведенного на высоте $20 \lg 40 = 32 \text{ дБ}$; участка с наклоном -20 дБ/дек ; участка с на-

клоном -40 дб/дек . Эта асимптотическая характеристика представлена на рис. 61.

Так как отношение $T_1/T_2 = 5$, т. е. превышает две октавы, то из решения задачи 57 следует, что отклонение асимптотической амплитудной характеристики от точной в районе каждого излома имеет такой же вид, как и для аperiodического звена и не превышает 3 дб.

Фазовая характеристика имеет вид

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} 0,1\omega - \operatorname{arctg} 0,02\omega. \quad (4)$$

Последнее выражение позволяет построить $\psi(\omega)$ по точкам. Однако проще построить $\psi(\omega)$ как сумму ординат фазовых характеристик $\psi_1(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ двух аperiodических звеньев с постоянными времени $T_1 = 1 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,2 \text{ сек}$, так как каждая из этих характеристик легко строится при помощи графиков приложения 3.

Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ системы дана на рис. 61.

83. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{12,5}{p(1 + 0,004p + 0,0004p^2)}.$$

У к а з а н и е. Передаточную функцию следует привести к виду, удобному для построения логарифмических характеристик, т. е. найти, соответствует ли полином второй степени в знаменателе двум аperiodическим звеньям или он соответствует колебательному звену, и определить необходимые параметры этих звеньев.

Ответ. См. рис. 62.

84. Система автоматического регулирования, блок-схема которой построена по образцу, представленному на рис. 44, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{K(1 + T_2p)}{p(1 + T_1p)(1 + T_3p)(1 + T_4p)} = \\ &= \frac{K(1 + 0,017p)}{p(1 + 0,05p)(1 + 0,0025p)(1 + 0,001p)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Построить логарифмические асимптотическую амплитудную и фазовую характеристики системы для двух значений коэффициента усиления: $K = 500 \text{ сек}^{-1}$ и $K = 2000 \text{ сек}^{-1}$.

Решение. Частотная передаточная функция, соответствующая (1), имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + j0,017\omega)}{j\omega(1 + j0,05\omega)(1 + j0,0025\omega)(1 + j0,001\omega)}. \quad (2)$$

Из выражения (2) или из выражения (1) видно, что асимптотическая амплитудная характеристика имеет вид

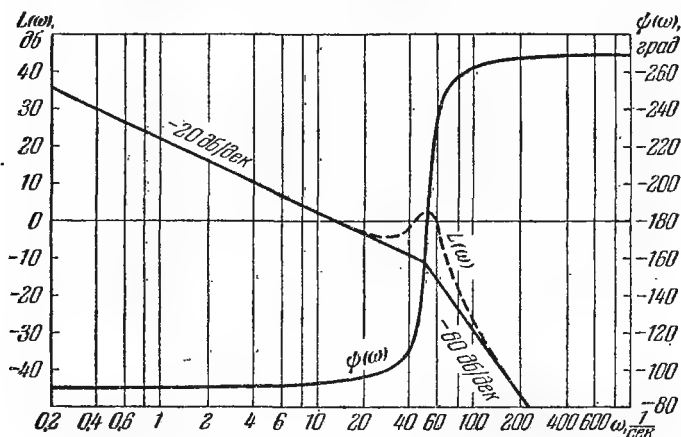


Рис. 62. Логарифмические характеристики к задаче 83.

ломаной прямой с участками, имеющими отрицательный наклон $20-40-20-40-60 \text{ дБ/дек}$, и с изломами в точках $\omega_1 = 1/T_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_2 = 1/T_2 = 59 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_3 = 1/T_3 = 400 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_4 = 1/T_4 = 1000 \text{ сек}^{-1}$; первый участок характеристики является частью прямой с наклоном -20 дБ/дек , пересекающей ось частот в точке $\omega = K$.

Асимптотические амплитудные характеристики $L_1(\omega)$ для случая $K = 500 \text{ сек}^{-1}$ и $L_2(\omega)$ для случая $K = 2000 \text{ сек}^{-1}$ изображены на рис. 63.

Фазовая характеристика для обоих случаев совпадает и, согласно (1) или (2), может быть найдена как

сумма ординат фазовой характеристики $\psi_0(\omega)$ идеального интегрирующего звена, фазовых характеристик $\psi_1(\omega)$, $\psi_3(\omega)$ и $\psi_4(\omega)$ апериодических звеньев с постоянными времени T_1 , T_3 и T_4 и $\psi_2(\omega)$ — дифференцирующего звена с постоянной времени T_2 .

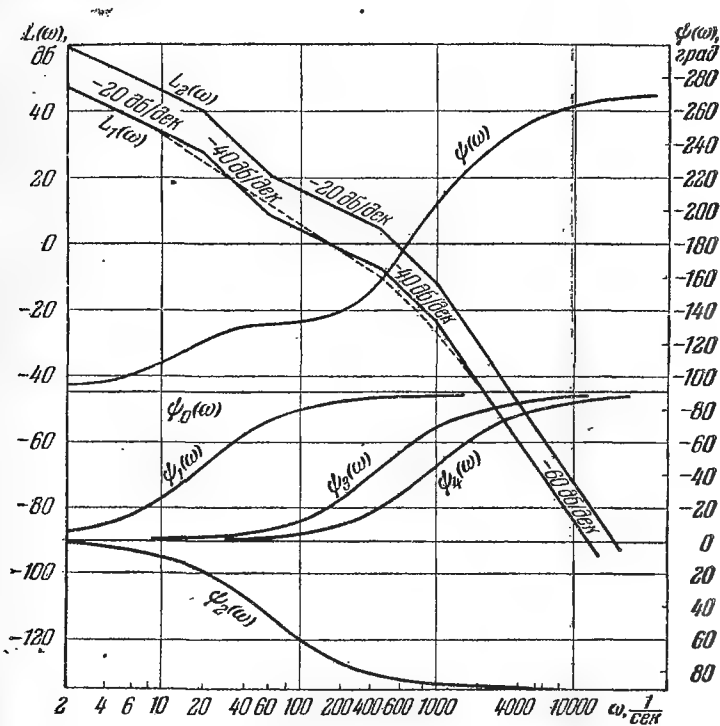


Рис. 63. Логарифмические характеристики к задаче 84.

Указанные фазовые характеристики звеньев и результирующая фазовая характеристика $\psi(\omega)$ всей системы построены на рис. 63.

85. Построить логарифмическую асимптотическую амплитудную характеристику $L(\omega)$ и логарифмическую фазовую характеристику $\psi(\omega)$ системы с передаточной

функцией

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p^2(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)};$$

при $K = 75 \text{ сек}^{-2}$, $T_1 = 200 \text{ мсек}$, $T_2 = 25 \text{ мсек}$, $T_3 = 6 \text{ мсек}$.

Ответ. См. рис. 64.

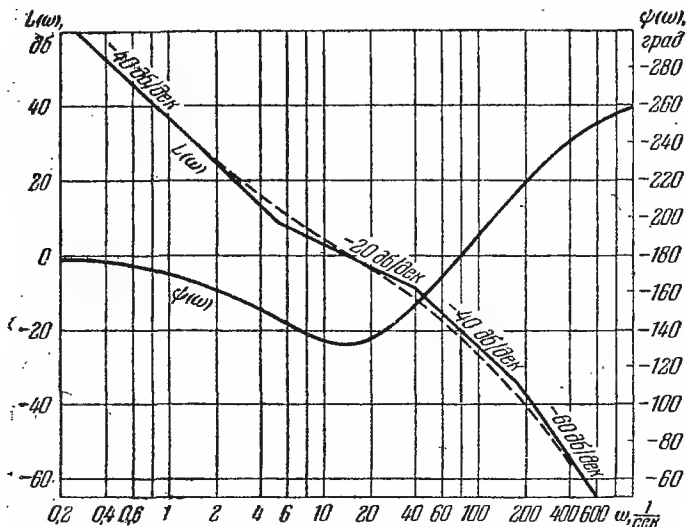


Рис. 64. Логарифмические характеристики к задаче 85.

86. Построить логарифмическую амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)^2}{p^3(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} = \frac{K(1 + 0,25p)^2}{p^3(1 + 0,03p)(1 + 0,008p)}$$

для трех случаев: 1) $K = 250 \text{ сек}^{-3}$; 2) $K = 75 \text{ сек}^{-3}$; 3) $K = 1000 \text{ сек}^{-3}$.

Ответ. На рис. 65 показаны асимптотические амплитудные характеристики $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$ и $L_3(\omega)$, причем индекс соответствует номеру случая; для случая 1 пунктиром показана точная амплитудная характеристика. Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ для всех случаев одна и та же.

87. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы со следующей передаточной

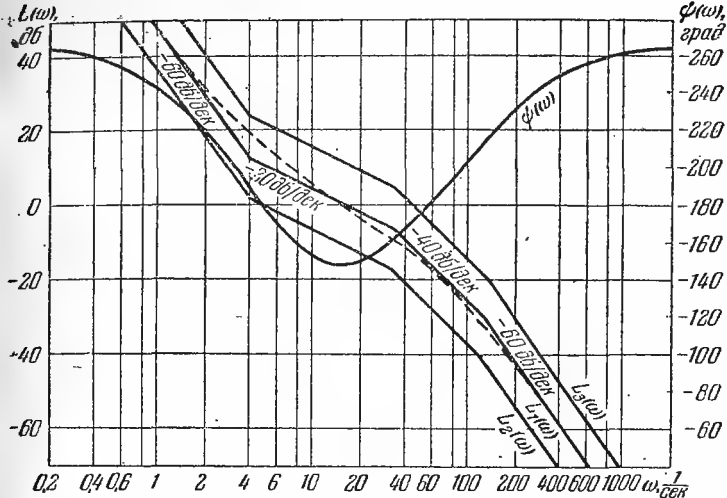


Рис. 65. Логарифмические характеристики к задаче 86.

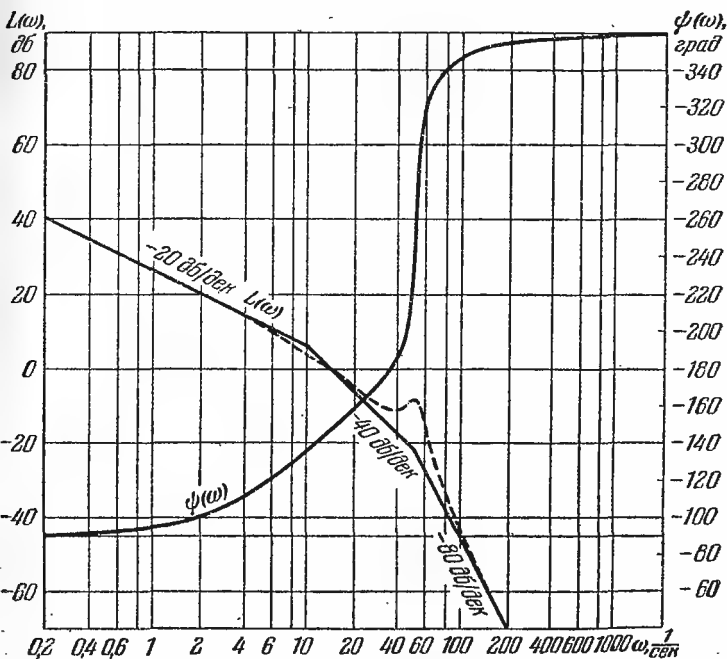


Рис. 66. Логарифмические характеристики к задаче 87.

функцией:

$$W(p) = \frac{20}{p(1 + 0,104p + 0,0008p^2 + 0,0004p^3)}.$$

Указание. Знаменатель передаточной функции следует разложить на множители, чтобы привести $W(p)$ к виду, удобному для построения логарифмических характеристик.

Ответ. Амплитудная $L(\omega)$ и фазовая $\psi(\omega)$ характеристики построены на рис. 66.

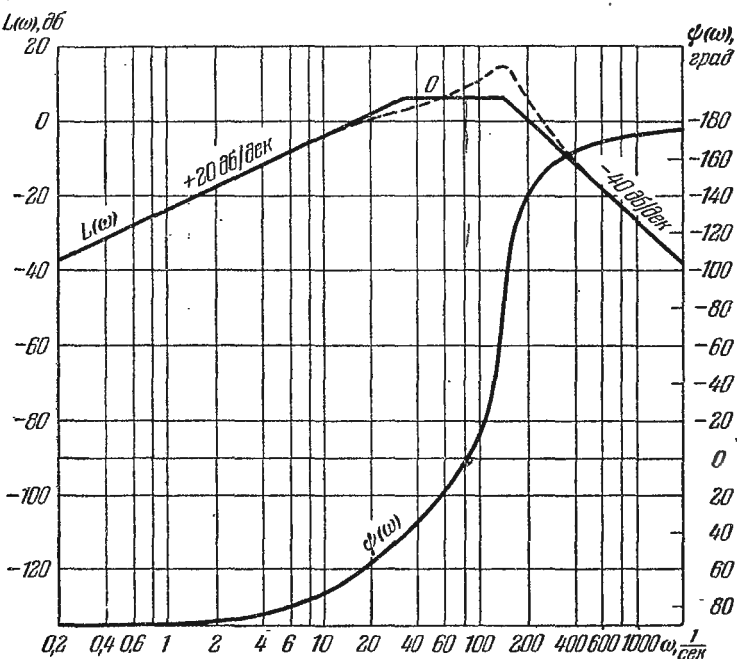


Рис. 67. Логарифмические характеристики к задаче 88.

88. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{Kp}{(1 + T_1p)(1 + 2\xi T_2p + T_2^2p^2)}$$

при $K = 0,0645 \text{ сек}$; $T_1 = 30 \text{ мсек}$; $T_2 = 7 \text{ мсек}$; $\xi = 0,2$.

Ответ. См. рис. 67.

89. Построить логарифмические амплитудно-фазовые характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)} = \frac{K(1 + 0,017p)}{p(1 + 0,05p)(1 + 0,0025p)(1 + 0,001p)}$$

для двух случаев: 1) $K = K_1 = 500 \text{ сек}^{-1}$; 2) $K = K_2 = 2000 \text{ сек}^{-1}$.

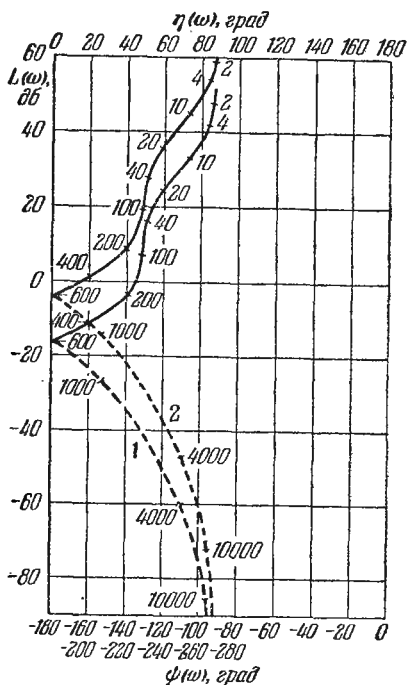


Рис. 68. Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики к задаче 89.

Решение. Для построения логарифмической амплитудно-фазовой характеристики $20 \lg |W(j\omega)| = f[\phi(j\omega)]$ предварительно строятся логарифмические амплитудная и фазовая характеристики системы. Используя эти

характеристики $L_1(\omega)$ и $\psi(\omega)$, изображенные на рис. 63 (см. задачу 84), строим по точкам логарифмическую амплитудно-фазовую характеристику для случая

$K = K_1 = 500 \text{ сек}^{-1}$. Эта характеристика представлена на рис. 68 (кривая 1). Числа возле отметок на кривой указывают соответствующие значения частоты ω в сек^{-1} .

Высокочастотная часть кривой, для которой $\psi(\omega) < -180^\circ$, заменена ее зеркальным отображением в оси ординат. Для этой части кривой, показанной на рисунке пунктиром, на оси абсцисс предусмотрена дополнительная шкала углов от -180 до -280° . На рисунке имеется также шкала запаса по фазе, равного $\eta(\omega) = \psi(\omega) + 180^\circ$.

Для случая $K = K_0 = 2000 \text{ сек}^{-1}$ аналогичная кривая может быть построена переносом всех точек кривой 1 на 12 дБ вверх ($20 \lg K_2/K_1 = 12 \text{ дБ}$), см. рис. 68, кривая 2.

Рис. 69. Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики к задаче 90.

90. Построить логарифмические амплитудно-фазовые характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p^2(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} = \frac{K(1 + 0,2p)}{p^2(1 + 0,025p)(1 + 0,006p)}$$

для двух случаев: 1) $K = 75 \text{ сек}^{-2}$; 2) $K = 400 \text{ сек}^{-2}$.

Указание. Возможно использование решения задачи 85.

Ответ. См. рис. 69, где кривая 1 относится к первому случаю, а кривая 2 — ко второму.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 3.1. Алгебраические критерии устойчивости

91. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$p^3 + p^2 + 2p + 1 = 0.$$

Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

92. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$5p^3 + 2p^2 - 3p + 1 = 0.$$

Определить устойчивость системы.

Решение. Система неустойчива, так как не выполняется необходимое условие устойчивости.

93. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)}.$$

Определить условия устойчивости замкнутой системы.

Ответ. $K > 0$, $T > 0$.

94. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p^2},$$

где $K = 100 \text{ сек}^{-2}$.

Определить устойчивость замкнутой системы.

Ответ. Замкнутая система находится на границе устойчивости.

95. Определить устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p^2(1 + Tp)}.$$

где $K = 20 \text{ сек}^{-2}$ — добротность системы по ускорению, $T = 0,01 \text{ сек}$ — постоянная времени.

Ответ. Замкнутая система структурно неустойчива, т. е. неустойчива при любых значениях K и $T \neq 0$.

96. Структурная схема системы приведена на рис. 70. Коэффициент усиления разомкнутой системы $K > 0$,

постоянная времени $T > 0$. Определить устойчивость разомкнутой системы и условие устойчивости замкнутой системы.

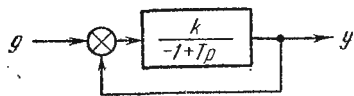


Рис. 70. Структурная схема системы к задаче 96.

Ответ. Разомкнутая система неустойчива. Замкнутая система устойчива при $K > 1$.

97. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$(k_1 - k_2)p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0,$$

где $k_1 = 25 \text{ сек}^3$, $k_2 = 25 \text{ сек}^3$, $a_1 = 10 \text{ сек}^2$, $a_2 = 5 \text{ сек}$, $a_3 = 25$. Определить устойчивость системы.

Решение. Коэффициент при старшем члене характеристического полинома $a_0 = k_1 - k_2$. При $k_1 - k_2 < 0$ система неустойчива, так как не выполняется необходимое условие устойчивости. При $a_0 = k_1 - k_2 > 0$ и при выполнении условия $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ (см. приложение 6) система устойчива. В данной задаче $a_0 = k_1 - k_2 = 25 - 25 = 0$. Система находится на границе устойчивости.

98. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p = 0,$$

где $a_0 = 10 \text{ сек}^4$, $a_1 = 5 \text{ сек}^3$, $a_2 = 2 \text{ сек}^2$, $a_3 = 10 \text{ сек}$. Определить устойчивость системы.

Решение. Характеристическое уравнение системы запишем в следующем виде:

$$(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3)p = 0. \quad (1)$$

Из (1) видно, что один из корней характеристического уравнения равен нулю. Система будет находиться на границе устойчивости, если все остальные корни характеристического уравнения лежат в левой половине

плоскости корней. Для этого должны выполняться условия устойчивости для полинома

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3,$$

которые имеют вид

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Для значений коэффициентов $a_0, \dots, a_3$, принятых в задаче, последнее неравенство не выполняется. Поэтому система неустойчива.

99. Решить предыдущую задачу для следующих значений коэффициентов:

а) $a_0 = 10 \text{ сек}^4, \quad a_1 = 5 \text{ сек}^3, \quad a_2 = 2 \text{ сек}^2, \quad a_3 = 1 \text{ сек};$

б) $a_0 = 10 \text{ сек}^4, \quad a_1 = 5 \text{ сек}^3, \quad a_2 = 2 \text{ сек}^2, \quad a_3 = 0,5 \text{ сек}.$

Ответ. а) Система находится на границе устойчивости; б) система находится на апериодической границе устойчивости.

100. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p^2 (1 + T_1 p) (1 + T_2 p)},$$

где $K = 50 \text{ сек}^{-2}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы; $T_1 = 1 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,05 \text{ сек}$ — постоянные времени. Определить устойчивость замкнутой системы.

Ответ. Система структурно неустойчива, т. е. неустойчива при любых значениях общего коэффициента усиления разомкнутой системы K и постоянных времени $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$.

101. Передаточная функция замкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{K}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K},$$

где $K = 50 \text{ сек}^{-1}, \quad T_1 = 0,2 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,2 \text{ сек}.$

Определить устойчивость системы.

Ответ. Система неустойчива.

102. Решить задачу 101, если $K = 50 \text{ сек}^{-1}, \quad T_1 = 0,1 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,02 \text{ сек}.$

Ответ. Система устойчива.

103. Движение автоматической системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} - \Omega(\gamma_0 + \gamma) &= c_2\gamma_0 + \delta_1, \\ \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} + \Omega\psi &= -c_1\gamma_0 + \delta_2, \\ \dot{\gamma} + \Omega\psi &= -k_1(\gamma_1 - \gamma_u) + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где γ_u — задающее воздействие; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — возмущающие воздействия; γ_1, γ_0, ψ — координаты системы; $\Omega = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$, $k_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$, c_1, c_2 — коэффициенты. Определить условия устойчивости системы.

Решение. Запишем систему дифференциальных уравнений (1) в символической форме:

$$\left. \begin{aligned} p\psi - \Omega(\gamma_0 + \gamma) &= c_2\gamma_0 + \delta_1, \\ p\gamma_0 + p\gamma + \Omega\psi &= -c_1\gamma_0 + \delta_2, \\ p\gamma + \Omega\psi &= -k_1(\gamma - \gamma_u) + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где p — символ дифференцирования.

Характеристический полином автоматической системы равен определителю системы уравнений (2):

$$D(p) = \Delta(p) = \begin{vmatrix} -\Omega & -(\Omega + c_2) & p \\ p & p + c_1 & \Omega \\ p + k_1 & 0 & \Omega \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы:

$$\begin{aligned} p^3 + (c_1 + k_1)p^2 + (\Omega^2 + k_1c_1)p + \Omega^2(k_1 + c_1) + \Omega c_2k_1 &= \\ = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 &= 0, \end{aligned}$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = c_1 + k_1$, $a_2 = \Omega^2 + k_1c_1$, $a_3 = \Omega^2(k_1 + c_1) + \Omega c_2k_1$.

Условие устойчивости получим, используя критерий устойчивости Гурвица (приложение 6). В данной задаче система будет устойчивой при выполнении следующих неравенств:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \quad (3)$$

Подставляя в неравенства (3) значения коэффициентов системы, получим условие устойчивости

$$c_2 < \frac{c_1^2 + k_1 c_1}{\Omega} = 863 c_1^2 + 8630 c_1.$$

104. Определить устойчивость автоматической системы управления, если ее движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} - \Omega (\gamma_0 + \gamma) &= c_2 \gamma_0, \\ \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} + \Omega \psi &= -c_1 \gamma_0, \\ \dot{\gamma} + \Omega \psi &= -k_1 (\gamma_0 - \gamma_{\text{н}}) + \int k_2 (\gamma_0 - \gamma_{\text{н}}) dt, \end{aligned} \right\}$$

где $\gamma_{\text{н}}$ — задающее воздействие; γ , γ_0 , ψ — координаты системы; $\Omega = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$, $k_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-2}$, $k_1 = 1 \times 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$, $c_1 = 10^{-1} \text{ сек}^{-1}$, $c_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ — коэффициенты. Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

105. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p^2(1 + T_2 p)}.$$

Определить условие устойчивости замкнутой системы.

Ответ. $T_1 > T_2$.

106. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T p)^3},$$

где $K = 5$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T = 0,5 \text{ сек}$ — постоянная времени. Определить устойчивость замкнутой системы.

Ответ. Замкнутая система устойчива.

107. Передаточная функция разомкнутой системы одноосной гироскопической стабилизации имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)}.$$

Общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = 50 \text{ сек}^{-1}$, постоянная времени $T_r = 0,01 \text{ сек}$. Опреде-

лить: а) при каких значениях коэффициента демпфирования ξ гироскопический стабилизатор устойчив; б) условие устойчивости.

Ответ. а) Гироскопический стабилизатор устойчив при коэффициенте демпфирования $\xi > 0,25$; б) $K < \frac{2\xi}{T_r}$.

108. В одноосном гироскопическом стабилизаторе, рассмотренном в задаче 107, для увеличения области устойчивости введен сигнал, пропорциональный производной от угла прецессии. При этом передаточная функция разомкнутой системы будет следующей:

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)}.$$

Определить: а) условие устойчивости гиростабилизатора; б) устойчивость гиростабилизатора при общем коэффициенте усиления разомкнутой системы $K = 50 \text{ сек}^{-1}$; при постоянных времени $T_r = 0,01 \text{ сек}$, $\tau = 0,01 \text{ сек}$; коэффициенте демпфирования $\xi = 0,1$.

Ответ. а) $K < \frac{2\xi}{T_r - 2\xi\tau}$; б) гиростабилизатор устойчив.

109. Передаточная функция одноосного гиростабилизатора имеет вид

$$W_1(p) = \frac{k_1}{p(1 + T_r^2 p^2)},$$

где $k_1 = 25 \text{ сек}^{-1}$ — коэффициент усиления разомкнутой системы; $T_r = 0,01 \text{ сек}$ — постоянная времени.

Для демпфирования системы последовательно в канал управления введено звено с бесконечной полосой пропускания (рис. 71) и коэффициентом усиления $k_2 = 1$. Выбрать постоянную времени корректирующего звена T из условия устойчивости.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 - Tp)}{p(1 + T_r^2 p^2)(1 + Tp)},$$

где $K = k_1 k_2$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы равен сумме полиномов знаменателя и числителя передаточной функции разомкнутой системы:

$$D(p) = p(1 + T_r^2 p^2)(1 + Tp) + K(1 - Tp) = \\ = T_r^2 T p^4 + T_r p^3 + T p^2 + (1 - KT) p + K.$$

Используя критерий устойчивости Гурвица для автоматических систем, имеющих характеристический полином четвертого порядка (приложение 6), получаем условие устойчивости гиросtabilизатора

$$K < \frac{1}{T} - \frac{T_r^2}{T^3}.$$

Гиросtabilизатор устойчив, например, при $T = 0,015$ сек.

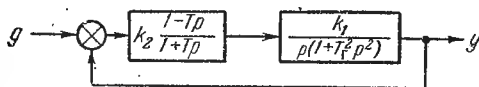


Рис. 71. Структурная схема гиросtabilизатора к задаче 109.

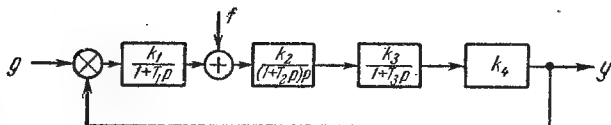


Рис. 72. Структурная схема к задаче 110.

110. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 72. Постоянные времени звеньев $T_1 = 0,01$ сек, $T_2 = 0,5$ сек, $T_3 = 0,05$ сек. Определить критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2 k_3 k_4$, при котором автоматическая система находится на границе устойчивости.

Ответ. Критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K_k = 16,8$ сек⁻¹.

111. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)},$$

где K — добротность системы по скорости; $T_1 = 0,2$ сек, $T_3 = 0,02$ сек — постоянные времени объекта управления и усилителя; T_2 — постоянная времени корректирующего устройства. Определить значения постоянной времени корректирующего устройства T_2 , при которых замкнутая система устойчива при любых положительных значениях добротности системы по скорости.

Ответ. $T_2 \geq \frac{T_1 T_3}{T_1 + T_3} = 0,018$ сек.

112. Структурная схема электромеханической следящей системы приведена на рис. 73. Коэффициент передачи измерительного элемента $k_{и,э} = 1$ в/град = 57,3 в/рад,

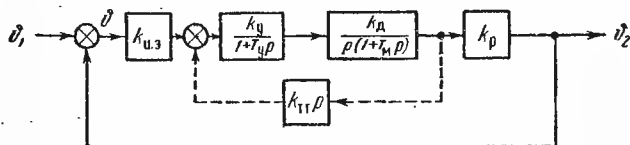


Рис. 73. Структурная схема электромеханической следящей системы.

коэффициент усиления усилителя $k_y = 1000$, коэффициент передачи двигателя $k_d = 50$ рад/в сек коэффициент передачи редуктора $k_p = 10^{-3}$, постоянная времени двигателя $T_m = 0,05$ сек, постоянная времени усилителя $T_y = 0,005$ сек. Определить: а) устойчивость электромеханической следящей системы при отсутствии тахометрической обратной связи; б) значения коэффициента передачи тахогенератора $k_{тг}$, при которых следящая система устойчива.

Ответ. а) Следящая система неустойчива;

$$\text{б) } k_{тг} > \left[\frac{k_{и,э} k_y k_d k_p}{\frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_y}} - 1 \right] (k_y k_d)^{-1} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ в} \cdot \text{сек/рад}.$$

113. Схема электромеханической следящей системы приведена на рис. 74, а. Коэффициент передачи измерительного элемента, выполненного на СКВТ, $k_{и,э} = 1$ в/град; коэффициент усиления первого усилителя — k_1 ; коэффициент усиления второго усилителя — k_2 ; постоянная времени второго усилителя — $T = 0,0,05$ сек; коэффи-

При отсутствии корректирующего контура передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_1(p) = \frac{K'}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)},$$

где $K' = k_{и.э} k_1 k_2 k_d k_p$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы. Условие устойчивости замкнутой системы имеет вид

$$K' < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m} = 220 \text{ сек}^{-1}.$$

По условию задачи общий коэффициент усиления разомкнутой системы должен быть больше 300 сек^{-1} . Для обеспечения устойчивости введем в систему корректирующее звено (пунктир на рис. 74).

Передаточная функция разомкнутой системы при введении в систему корректирующего звена имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_p)}{p \left(1 + \frac{T}{1 + k_1} p \right) (1 + T_y p)(1 + T_m p)},$$

где $K = \frac{k_{и.э} \cdot k_1 k_2 k_d k_p}{1 + k_1}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Постоянную времени корректирующего звена T выберем равной постоянной времени двигателя T_m . Это всегда можно сделать выбором параметров R и C . Положим $R = 0,1 \text{ мом.}$ Тогда $C = \frac{T_m}{R} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \text{ мкф.}$

При $T = T_m$ передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{T_m}{1 + k_1} p \right) (1 + T_y p)},$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\frac{T_m}{1 + k_1} T_y p^3 + \left(\frac{T_m}{1 + k_1} + T_y \right) p^2 + p + K = 0.$$

Условие устойчивости записывается в виде

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{k_1 + 1}{T_m}.$$

Из последнего неравенства получаем выражение для определения k_1 :

$$k_1 > \left(K - \frac{1}{T_y} \right) T_m - 1 = 4.$$

Выбираем $k_1 = 9$.

Величину коэффициента усиления k_2 выбираем из условия обеспечения заданного значения общего коэффициента усиления разомкнутой системы:

$$k_2 = \frac{K(1+k_1)}{k_{и.э} k_1 k_d k_p} = \frac{300(1+9)}{57,3 \cdot 9 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = 174.$$

114. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = 500 \text{ сек}^{-1}$, постоянная времени $T_1 = 0,02 \text{ сек}$. Определить значение постоянной времени T_2 , при котором замкнутая система оказывается на границе устойчивости.

Ответ. $T_2 = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.

115. Структурная схема системы управления статически устойчивого летательного аппарата приведена на

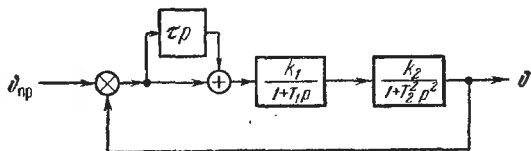


Рис. 75. Структурная схема системы управления статически устойчивого летательного аппарата по углу тангажа.

рис. 75. Коэффициенты передачи $k_1 = 1$, $k_2 = 5$; постоянные времени $T_1 = 0,5 \text{ сек}$ и $T_2 = 2 \text{ сек}$. Определить: а) устойчивость системы без корректирующего звена

($W_K = \tau\rho$ на рис. 75); б) величину постоянной времени корректирующего звена τ из условия устойчивости.

Ответ: а) система неустойчива;

б) $\tau > T_1 = 0,5$ сек.

116. На рис. 76 приведена структурная схема системы управления жесткого статически неустойчивого летательного аппарата. Постоянная времени рулевого привода $T_1 = 0,5$ сек; постоянная времени объекта $T_2 = 2$ сек.

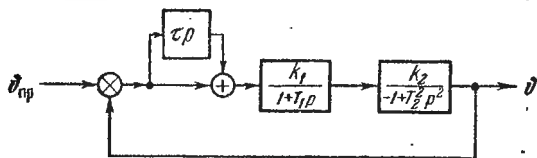


Рис. 76. Структурная схема системы управления статически неустойчивого летательного аппарата.

Определить значения постоянной времени корректирующего звена τ и общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2$ из условия обеспечения устойчивости системы.

Ответ. Условия устойчивости системы имеют следующий вид:

$$\tau > T_1, \quad K > 1, \quad K > \frac{T_1}{\tau}.$$

Система устойчива, например, при $K = 5$, $\tau = 0,7$ сек.

117. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 77. Коэффициенты передачи звеньев

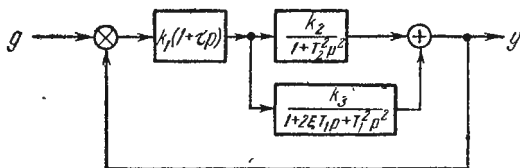


Рис. 77. Структурная схема системы к задаче 117.

$k_1 = 2 \cdot 10^3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 0,25 \cdot 10^{-3}$; постоянные времени $\tau = 0,7 \cdot 10^{-3}$ сек, $T_2 = 1,42$ сек, $T_3 = 2,2 \cdot 10^{-2}$ сек; коэф-

коэффициент демпфирования $\xi = 0,68 \cdot 10^{-2}$. Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

118. Определить устойчивость автоматической системы, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$$

при следующих значениях коэффициентов:

а) $a_0 = 0,005 \text{ сек}^5$, $a_1 = 0,15 \text{ сек}^4$, $a_2 = 1,25 \text{ сек}^3$,

$a_3 = 5 \text{ сек}^2$, $a_4 = 50 \text{ сек}$, $a_5 = 300$;

б) $a_0 = 0,005 \text{ сек}^5$, $a_1 = 0,1 \text{ сек}^4$, $a_2 = 2,5 \text{ сек}^3$,

$a_3 = 20 \text{ сек}^2$, $a_4 = 50 \text{ сек}$, $a_5 = 200$.

Ответ. а) Система неустойчива; б) система устойчива.

119. Характеристическое уравнение замкнутой автоматической системы имеет вид

$$a_0 p^6 + a_1 p^5 + a_2 p^4 + a_3 p^3 + a_4 p^2 + a_5 p + a_6 = 0,$$

где $a_0 = 1 \text{ сек}^6$, $a_1 = 2 \text{ сек}^5$, $a_2 = 3 \text{ сек}^4$, $a_3 = 4 \text{ сек}^3$, $a_4 = 5 \text{ сек}^2$, $a_5 = 6 \text{ сек}$, $a_6 = 100$.

Определить устойчивость системы.

Ответ. Система неустойчива.

§ 3.2. Критерий устойчивости Михайлова

120. Система автоматического управления имеет характеристическое уравнение четвертого порядка. Кривая Михайлова системы приведена на рис. 78. Определить устойчивость автоматической системы.

Ответ. Система устойчива.

121. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить устойчивость электромеханической следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом

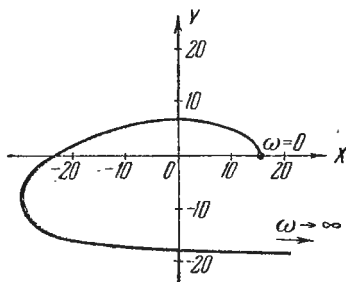


Рис. 78. Кривая Михайлова к задаче 120.

состоянии равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)},$$

где $K = 58 \text{ сек}^{-1}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T_m = 0,57 \text{ сек}$ — постоянная времени двигателя, $T_y = 0,01 \text{ сек}$ — постоянная времени усилителя.

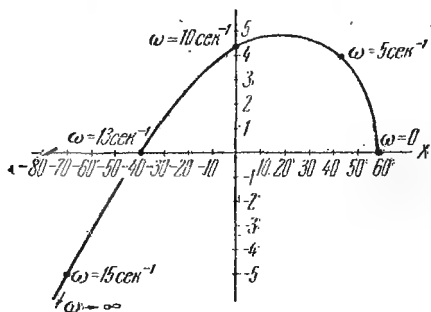


Рис. 79. Кривая Михайлова к задаче 121.

Решение. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} D(p) &= p(1 + T_y p)(1 + T_m p) + K = \\ &= T_y T_m p^3 + (T_y + T_m) p^2 + p + K. \end{aligned}$$

Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции $D(j\omega)$:

$$X(\omega) = \operatorname{Re} D(j\omega) = K - (T_y + T_m) \omega^2 = 58 - 0,58 \omega^2,$$

$$Y(\omega) = \operatorname{Im} D(j\omega) = \omega - T_y T_m \omega^3 = \omega - 5,7 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

Вычислим $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ для ряда значений частоты ω . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	5	10	13	15	∞
$X(\omega)$	58	44	0	-40	-70	$-\infty$
$Y(\omega)$	0	4	4,5	0	-5	$-\infty$

По данным таблицы построим кривую Михайлова (рис. 79). Кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранта. Следовательно, система устойчива.

122. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{-1 + Tp},$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T > 0$ — постоянная времени.

Используя критерий устойчивости Михайлова, получить условие устойчивости замкнутой системы.

Решение. Характеристический полином замкнутой системы равен сумме полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$D(p) = Tp + K - 1.$$

Вектор $D(j\omega)$ получаем, заменяя в характеристическом полиноме p на $j\omega$,

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= j\omega T + K - 1 = \\ &= X(\omega) + jY(\omega), \end{aligned}$$

где $X(\omega) = K - 1$, $Y(\omega) = \omega T$.

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы вектор $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от нуля до ∞ повернулся на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 80). При $K < 1$ кривая Михайлова расположена во втором квадранте и угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от нуля до ∞ равен $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, а при $K > 1$ равен $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Итак, замкнутая система устойчива при $K > 1$.

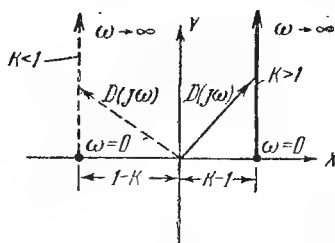


Рис. 80. Годограф вектора $D(j\omega)$ к задаче 122.

123. Система автоматического управления имеет характеристический полином шестого порядка. На рис. 81 приведены кривые Михайлова для различных значений параметров системы. Определить устойчивость системы.

Ответ. 1 — система находится на границе устойчивости; 2 — система устойчива; 3 — система неустойчива.

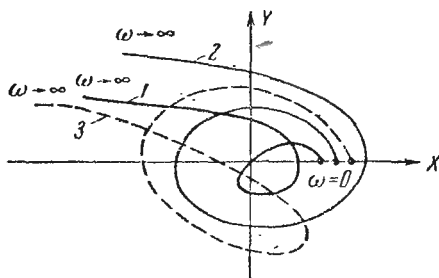


Рис. 81. Кривые Михайлова к задаче 123.

124. Система автоматического управления имеет характеристическое уравнение пятого порядка. На рис. 82 приведена кривая Михайлова системы. Определить число корней характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью и число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

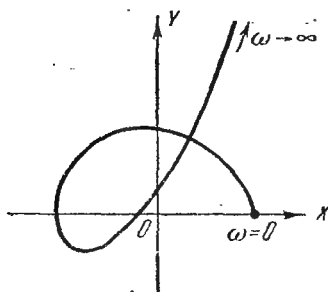


Рис. 82. Кривая Михайлова к задаче 124.

Решение. Угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен

$$\varphi = n \frac{\pi}{2} - l\pi, \quad (1)$$

где n — порядок характеристического уравнения; l — число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

Из рис. 82 видно, что угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

После подстановки в (1) значения угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $n = 5$

получаем, что число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью

$$l = \frac{5 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{\pi} = 2.$$

Кривая Михайлова через начало координат не проходит, поэтому число корней с отрицательной вещественной частью равно $n - l = 5 - 2 = 3$.

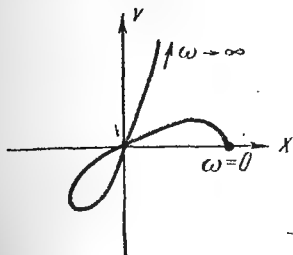


Рис. 83. Кривая Михайлова к задаче 125.

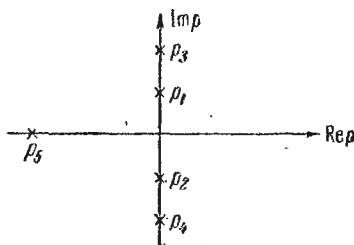


Рис. 84. Расположение корней характеристического уравнения к задаче 125.

125. На рис. 83 приведена кривая Михайлова автоматической системы, имеющей характеристическое уравнение пятого порядка. Нарисовать качественную картину расположения корней характеристического уравнения на плоскости корней.

Ответ. Картина расположения корней приведена на рис. 84.

126. Автоматическая система имеет характеристическое уравнение четвертого порядка. Кривая Михайлова системы приведена на рис. 85. Определить число корней характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью.

Ответ. Характеристическое уравнение системы имеет два корня с отрицательной вещественной частью.

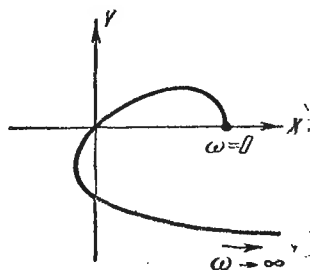


Рис. 85. Кривая Михайлова к задаче 126.

127. Передаточная функция замкнутой автоматической системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{K}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + K},$$

где $K = 100 \text{ сек}^{-1}$, $a_3 = 1$, $a_2 = 1 \text{ сек}$, $a_1 = 0,02 \text{ сек}^2$, $a_0 = 0,001 \text{ сек}^3$.

Определить устойчивость системы с помощью критерия устойчивости Михайлова.

Ответ. Система неустойчива.

128. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы; $T_1 = 0,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,1 \text{ сек}$, $T_3 = 0,02 \text{ сек}$ — постоянные времени.

С помощью критерия устойчивости Михайлова определить значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы K_k , при котором система оказывается на границе устойчивости.

Решение. Характеристический многочлен замкнутой системы равен

$$\begin{aligned} D(p) &= p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = \\ &= T_1 T_2 T_3 p^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^3 + \\ &\quad + (T_1 + T_2 + T_3) p^2 + p + K. \end{aligned}$$

После подстановки вместо T_1 , T_2 , T_3 их числовых значений получаем

$$D(p) = 10^{-3} p^4 + 62 \cdot 10^{-3} p^3 + 610 \cdot 10^{-3} p^2 + p + K.$$

$D(j\omega)$ получаем, заменяя в характеристическом полиноме p на $j\omega$,

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$X(\omega) = K - 610 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 10^{-3} \omega^4,$$

$$Y(\omega) = \omega - 62 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

При нахождении системы на колебательной границе устойчивости кривая Михайлова проходит через начало

координат при частоте $\omega \neq 0$. Поэтому при $K = K_k$.

$$X(\omega) = K_k - 610 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 10^{-3} \omega^4 = 0, \quad (1)$$

$$Y(0) = \omega - 62 \cdot 10^{-3} \omega^3 = 0. \quad (2)$$

Из второго уравнения находим значение квадрата частоты, при котором кривая Михайлова проходит через начало координат:

$$\omega^2 = (62 \cdot 10^{-3})^{-1} \text{ сек}^{-2}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), после несложных преобразований получаем

$$K_k = \frac{610 \cdot 10^{-3}}{62 \cdot 10^{-3}} - \frac{10^{-3}}{62^2 \cdot 10^{-6}} = 9,6.$$

129. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + 2\xi T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы; $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,2 \text{ сек}$, $T_3 = 0,1 \text{ сек}$ — постоянные времени; $\xi = 0,5$ — коэффициент демпфирования.

С помощью критерия устойчивости Михайлова определить значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы K_k , при котором замкнутая система находится на границе устойчивости.

Ответ. $K_k = 0,46$.

130. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 86.

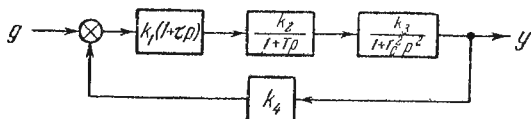


Рис. 86. Структурная схема системы к задаче 130.

Общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2 k_3 k_4 = 10$; постоянные времени $T = 0,2 \text{ сек}$, $T_0 = 0,8 \text{ сек}$. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить величину постоянной времени корректирующей цепи.

щего устройства $\tau = \tau_k$, при которой система находится на границе устойчивости.

Ответ. $\tau_k = 0,2$ сек.

131. Структурная схема системы автоматической стабилизации статически неустойчивого объекта приведена на рис. 87.

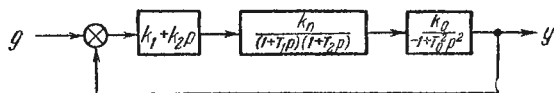


Рис. 87. Структурная схема системы автоматической стабилизации статически неустойчивого объекта.

Постоянные времени привода $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,1$ сек. Постоянная времени объекта $T_0 = 2$ сек. Коэффициент передачи объекта $k_0 = 1$. Коэффициент передачи привода $k_n = 0,5$ град $\cdot$ в $^{-1}$. Коэффициент передачи корректирующего устройства $k_2 = 20$ град $\cdot$ сек $^{-1}$ в $^{-1}$. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить значения коэффициента передачи k_1 , при котором система находится на границе устойчивости.

Ответ. При $k_1 = 2$ в/град система находится на апериодической границе устойчивости. При $k_1 = 27$ в/град система находится на колебательной границе устойчивости.

132. Характеристическое уравнение автоматической системы имеет вид

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$$

где

$$a_0 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^5, \quad a_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^4, \quad a_2 = 0,1 \text{ сек}^3, \\ a_3 = 0,5 \text{ сек}^2, \quad a_4 = 0,9 \text{ сек}, \quad a_5 = 1.$$

Определить устойчивость системы.

Решение.

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$X(\omega) = a_5 - a_3\omega^2 + a_1\omega^4,$$

$$Y(\omega) = a_4\omega - a_2\omega^3 + a_0\omega^5.$$

После подстановки в выражения для $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ числовых значений $a_0, \dots, a_5$, получаем

$$X(\omega) = 1 - 0,5\omega^2 + 5 \cdot 10^{-3}\omega^4,$$

$$Y(\omega) = 0,9\omega - 0,1\omega^3 + 3 \cdot 10^{-4}\omega^5.$$

Неотрицательные корни уравнения $Y(\omega) = 0$:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 3,2 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_3 = 18 \text{ сек}^{-1}.$$

Положительные корни уравнения $X(\omega) = 0$:

$$\omega_4 = 1,41 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_5 = 9,9 \text{ сек}^{-1}.$$

Неотрицательные корни уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ перемежаются. Это говорит о том, что кривая Михайлова последовательно проходит пять квадрантов. Следовательно, система устойчива.

133. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить устойчивость автоматической системы, если ее характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$$

где

$$a_0 = 0,15 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^5, \quad a_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^4, \quad a_2 = 0,6 \text{ сек}^3,$$

$$a_3 = 4 \text{ сек}^2, \quad a_4 = 20 \text{ сек}, \quad a_5 = 500.$$

Ответ. Система неустойчива.

134. Характеристический многочлен автоматической системы равен

$$D(p) = 2 \cdot 10^{-4} p^6 + 80 \cdot 10^{-4} p^5 + 3 \cdot 10^{-1} p^4 + \\ + 1,24 p^3 + 10 p^2 + 40 p + 34.$$

Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

§ 3.3. Критерий устойчивости Найквиста

135. Амплитудно-фазовые характеристики устойчивых в разомкнутом состоянии систем приведены на рис. 88.

Определить устойчивость замкнутых систем.

Ответ. 1 — замкнутая система устойчива; 2 — замкнутая система неустойчива; 3 — замкнутая система устойчива.

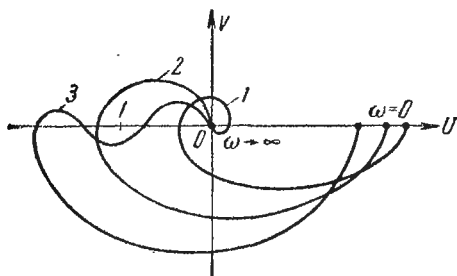


Рис. 88. А. ф. х. к задаче 135.

136. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_m p)(1 + T_y p)},$$

где $K \approx 100 \text{ сек}^{-1}$ — добротность следящей системы по скорости; $T_m = 0,1 \text{ сек}$ — постоянная времени двигателя; $T_y = 0,02 \text{ сек}$ — постоянная времени усилителя.

Определить устойчивость электромеханической следящей системы, используя критерий устойчивости Найквиста.

Решение. Для построения а. ф. х. разомкнутой системы определим амплитудную частотную характеристику $A(\omega)$ и фазовую частотную характеристику $\psi(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_m)(1 + j\omega T_y)} \right| = \\ &= \frac{K}{\omega \sqrt{1 + (\omega T_m)^2} \sqrt{1 + (\omega T_y)^2}} = \frac{100}{\omega \sqrt{1 + (\omega \cdot 0,1)^2} \sqrt{1 + (\omega \cdot 0,02)^2}}, \end{aligned}$$

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_m)(1 + j\omega T_y)} = -90^\circ + \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1(\omega) = -\arctg \omega T_m = -\arctg 0,1\omega,$$

$$\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_y = -\arctg 0,02\omega.$$

Вычислим $A(\omega)$, $\psi_1(\omega)$, $\psi_2(\omega)$, $\psi(\omega)$ для ряда значений ω . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	5	10	15	25	50	100
A	∞	18	6,9	3,56	1,32	0,28	0,045
$\psi_1, \text{град}$	0	-26	-45	-56	-68	-79	-84
$\psi_2, \text{град}$	0	-6	-11	-17	-26	-45	-64
$\psi, \text{град}$	-90	-122	-144	-153	-184	-214	-238

По данным таблицы построена а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 89).

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы имеет один нулевой корень. Поэтому ветвь а. ф. х., соответствующую частотам $\omega \rightarrow 0$, дополним дугой окружности бесконечно большого радиуса так, чтобы вектор

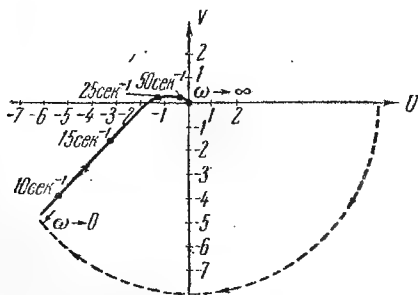


Рис. 89. А. ф. х. разомкнутой системы.

$W(j\omega)$ повернулся по часовой стрелке на угол, равный 90° (рис. 89). Из рис. 89 видно, что а. ф. х. разомкнутой системы охватывает точку $(-1, 0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

137. Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость электромеханической следящей системы, рассмотренной в задаче 136 при следующих параметрах системы: а) $K = 50 \text{ сек}^{-1}$, $T_m = 0,1 \text{ сек}$, $T = x$

$= 0,025 \text{ сек}$; б) $K = 200 \text{ сек}^{-1}$, $T_m = 0,02 \text{ сек}$, $T_y = 0,002 \text{ сек}$;
в) $K = 50 \text{ сек}^{-1}$, $T_m = 0,1 \text{ сек}$, $T_y = 0,005 \text{ сек}$.

Ответ. а) Система находится на колебательной границе устойчивости; б) система устойчива; в) система устойчива.

138. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_m(p) = \frac{K}{p(1 + T_m p)(1 + T_y p)}$$

На рис. 89 приведена а. ф. х. разомкнутой системы, построенная для добротности системы по скорости $K = 100 \text{ сек}^{-1}$.

Определить, при каких значениях K замкнутая система устойчива.

Ответ. Замкнутая система устойчива при $K < 57 \text{ сек}^{-1}$.

139. Передаточная функция одноосного гироскопического стабилизатора в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)}$$

где $K = 40 \text{ сек}^{-1}$, $T_r = 0,02 \text{ сек}$, $\xi = 0,15$.

Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость гиросtabilизатора в замкнутом состоянии.

Ответ. А. ф. х. разомкнутой системы приведена на рис. 90. Гиросtabilизатор неустойчив.

140. Передаточная функция системы управления статически устойчивым объектом в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_0^2 p^2)}$$

где $K = 1$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы; $\tau = 0,1 \text{ сек}$ — постоянная времени корректирующего устройства; $T_1 = 0,2 \text{ сек}$ — постоянная времени

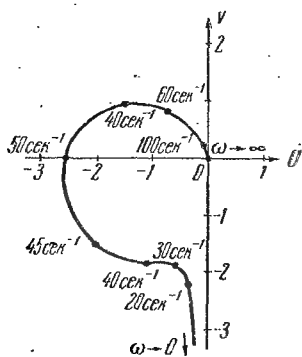


Рис. 90. А. ф. х. разомкнутой системы к задаче 139.

исполнительного устройства; $T_0 = 0,5$ сек — постоянная времени объекта.

Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость замкнутой системы.

Решение. Амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы

$$A(\omega) = \frac{k \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \cdot |1 - (\omega T_0)^2|} = \frac{\sqrt{1 + (0,1\omega)^2}}{\sqrt{1 + (0,2\omega)^2} \cdot |1 - (0,5\omega)^2|}.$$

Фазовая частотная характеристика

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \arctg \omega\tau - \arctg \omega T_1 = \arctg 0,1\omega - \arctg 0,2\omega \\ \quad \text{при } \omega < \frac{1}{T_0} = 2 \text{ сек}^{-1}, \\ \arctg \omega\tau - \arctg \omega T_1 - 180^\circ = \\ \quad = \arctg 0,1\omega - \arctg 0,2\omega - 180^\circ \\ \quad \text{при } \omega > \frac{1}{T_0} = 2 \text{ сек}^{-1}. \end{cases}$$

Вычислим $A(\omega)$ и $\psi(\omega)$ для ряда значений частоты ω . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	1	1,5	$\omega \rightarrow 2-0$	$\omega \rightarrow 2+0$	2,4	3	5	∞
$A(\omega)$	1	1,33	2,2	∞	∞	2,1	0,7	1,15	0
$\psi(\omega), \text{град}$	0	-6	-9	-11	-191	-192	-204	-198	-180

По данным таблицы построена а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 91).

При частоте $\omega = \frac{1}{T_0} = 2 \text{ сек}^{-1}$ а. ф. х. имеет разрыв. Ветви а. ф. х., соответствующие частотам $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} - 0$ и $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} + 0$, дополним полуокружностью бесконечно большого радиуса. Полуокружность проводим по часовой стрелке от ветви а. ф. х., соответствующей $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} - 0$, к ветви, соответствующей $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} + 0$ (рис. 91).

Из рис. 91 видно, что а. ф. х. разомкнутой системы охватывает точку $(-1, 0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

Определить устойчивость этой системы можно и более простым способом.

Из выражения для фазовой характеристики следует, что при $\tau > T_1$ для всех частот $\psi(\omega) > -180^\circ$. Поэтому

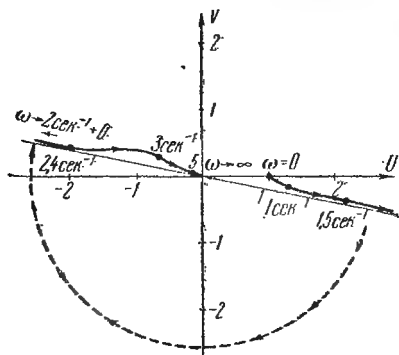


Рис. 91. А. ф. х. разомкнутой системы к задаче 140.

а. ф. х. при $\tau > T_1$ не заходит в третий квадрант и система устойчива при любых значениях $K > 0$ и T_0 . При $\tau < T_1$ $\psi(\omega) < -180^\circ$ для всех частот $\omega > \frac{1}{T_0}$. Поэтому часть а. ф. х., соответствующих частотам $\omega > \frac{1}{T_0}$, лежит в третьем квадранте, причем ветвь а. ф. х., соответствующая $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} + 0$, уходит в бесконечность. Поэтому при $\tau < T_1$ система неустойчива при любых K и T_0 . В данной задаче $\tau < T_1$. Поэтому система неустойчива.

141. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_0^2 p^2)},$$

где $K = 1$, $\tau = 0,4$ сек, $T_1 = 0,2$ сек, $T_2 = 0,1$ сек, $T_0 = 0,5$ сек. Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость замкнутой системы.

Ответ. Замкнутая система устойчива.

142. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{A(p)}{(1 + T_0^2 p^2) B(p)},$$

где $B(p)$ — многочлен, все корни которого имеют отрицательные вещественные части.

На рис. 92 приведена а. ф. х. разомкнутой системы.

Определить устойчивость замкнутой системы.

Ответ. Замкнутая система устойчива.

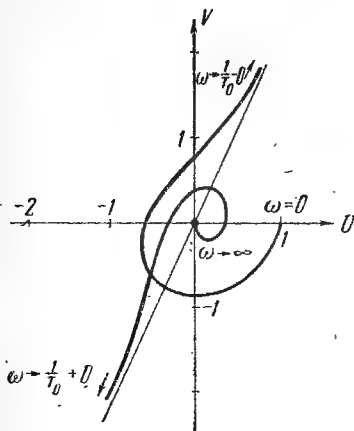


Рис. 92. А. ф. х. разомкнутой системы к задаче 142.

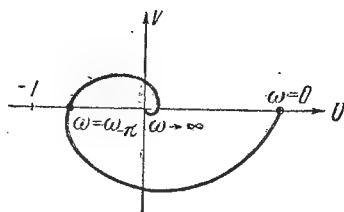


Рис. 93. А. ф. х. к задаче 143.

143. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{(1 + Tp)^n},$$

где $K > 0$, $T > 0$, $n > 2$.

Определить условие устойчивости замкнутой системы.

Решение. Вид а. ф. х. разомкнутой системы показан на рис. 93.

Фазовая частотная характеристика системы равна

$$\psi(\omega) = -n \operatorname{arctg} \omega T.$$

Определим значение частоты $\omega = \omega_{-\pi}$, при котором

$$\psi(\omega) = -n \operatorname{arctg} \omega T = -\pi. \quad (1)$$

Из (1) находим, что

$$\omega_{-\pi} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{T}.$$

Для устойчивости данной системы необходимо и достаточно, чтобы

$$|W(j\omega)|_{\omega=\omega_{-\pi}} = \frac{K}{(\sqrt{1+(\omega T)^2})^n} \Big|_{\omega=\omega_{-\pi}} < 1. \quad (2)$$

Из (2) находим условие устойчивости

$$K < \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}} \right)^n = \frac{1}{\cos^n \frac{\pi}{n}}.$$

Следует отметить, что устойчивость этой системы не зависит от величины постоянной времени T .

144. Определить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)^n},$$

где $K > 0$, $T > 0$.

Ответ. При $n=1$ система устойчива при любых значениях $K > 0$ и $T > 0$. При $n \geq 2$ система устойчива при

$$K < \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}} \right)^n}{T}.$$

145. Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость системы автоматической стабилизации летательного аппарата, передаточная функция

которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(-1 + Tp)},$$

где $K = 4 \text{ сек}^{-1}$, $T = 1 \text{ сек}$, $\tau = 0,5 \text{ сек}$.

Решение. Амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы имеет вид

$$A(\omega) = \frac{K \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\omega \sqrt{1 + (\omega T)^2}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{1 + (0,5\omega)^2}{1 + \omega^2}}.$$

Фазовая частотная характеристика равна

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctg \omega\tau - 90^\circ - (180^\circ - \arctg \omega T) = \\ &= -270^\circ + \arctg 0,5\omega + \arctg \omega. \end{aligned}$$

На рис. 94 приведена а. ф. х. разомкнутой системы.

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы имеет один нулевой корень. Поэтому ветвь а. ф. х., соответствующую частотам $\omega \rightarrow 0$, дополним дугой окружности бесконечно большого радиуса (см. рис. 94).

Многочлен знаменателя передаточной функции разомкнутой системы содержит один положительный корень.

Угол поворота вектора, начало которого находится в точке $(-1, 0)$, а конец на а. ф. х., при

изменении частоты ω от $+0$ до ∞ равен 180° . Следовательно, замкнутая система устойчива.

146. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 87. Постоянные времени $\tau = 0,1 \text{ сек}$, $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,01 \text{ сек}$, $T_0 = 2 \text{ сек}$. Коэффициенты передачи $k_1 = 6 \text{ в} \cdot \text{град}^{-1}$, $k_n = 0,5 \text{ град} \cdot \text{в}^{-1}$, $k_0 = 1$, $k_2 = 0,2 \text{ в} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^{-1}$.

Определить устойчивость системы, используя критерий устойчивости Найквиста.

Ответ. Система неустойчива.

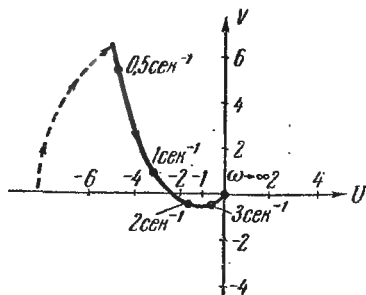


Рис. 94. А. ф. х. к задаче 145.

147. На рис. 95 изображена структурная схема двухканальной следящей системы с антисимметричными перекрестными связями.

Коэффициенты передачи звеньев $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5 \text{ сек}^{-1}$. Постоянная времени $T = 1 \text{ сек}$. Коэффициент перекрестной связи $a = 2$.

Определить устойчивость системы.

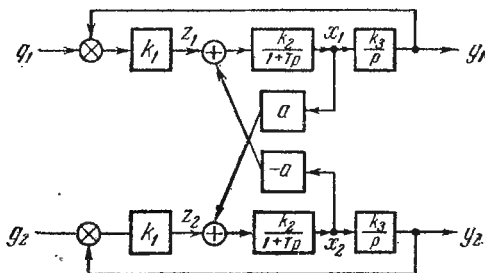


Рис. 95. Структурная схема двухканальной следящей системы с антисимметричными связями.

Решение. Двухканальные автоматические системы с идентичными каналами и антисимметричными связями удобно рассчитывать путем введения комплексных координат.

Согласно структурной схеме рис. 95 напомним уравнения движения системы:

$$x_1 = \frac{k_2}{1+Tp} (z_1 - ax_2), \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{k_2}{1+Tp} (z_2 + ax_1), \quad (2)$$

$$z_1 = k_1 (g_1 - y_1), \quad (3)$$

$$z_2 = k_1 (g_2 - y_2), \quad (4)$$

$$y_1 = \frac{k_3}{p} x_1, \quad (5)$$

$$y_2 = \frac{k_3}{p} x_2. \quad (6)$$

Умножая уравнения (2), (4) и (6) на j и складывая их соответственно с уравнениями (1), (3), (5), после несложных преобразований получаем

$$\bar{x} = \frac{k_1}{Tp + 1 - jak_2} \bar{z}, \quad (7)$$

$$\bar{z} = k_1(\bar{g} - \bar{y}), \quad (8)$$

$$\bar{y} = \frac{k_3}{p} \bar{x}, \quad (9)$$

где $\bar{x} = x_1 + jx_2$, $\bar{z} = z_1 + jz_2$, $\bar{g} = g_1 + jg_2$, $\bar{y} = y_1 + jy_2$.

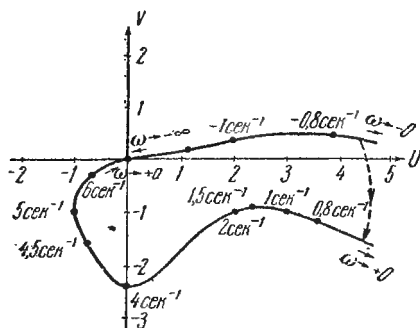


Рис. 96. А. ф. х. к задаче 147.

В результате решения системы уравнений (7) — (9) имеем

$$\bar{y} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \bar{g},$$

где

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{p(Tp + 1 - jak_2)} = \frac{K}{p(Tp + 1 - jak_2)}$$

— передаточная функция разомкнутой системы.

Частотная характеристика разомкнутой системы равна

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T + 1 - jak_2)} = U(\omega) + V(\omega),$$

где

$$U(\omega) = -\frac{K(\omega T - ak_2)}{\omega[1 + (\omega T - ak_2)^2]} = \frac{-10(\omega - 4)}{\omega[1 + (\omega - 4)^2]},$$

$$V(\omega) = -\frac{K}{\omega[1 + (\omega T - ak_2)^2]} = -\frac{10}{\omega[1 + (\omega - 4)^2]}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет комплексные коэффициенты. Поэтому для определения устойчивости необходимо построить а. ф. х. в диапазоне частот $-\infty \div +\infty$.

А. ф. х. системы приведена на рис. 96. Из рис. 96 видно, что а. ф. х. разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, 0)$. Следовательно, двухканальная следящая система устойчива.

148. Структурная схема системы приведена на рис. 97. Параметры системы равны: $K = 20 \text{ сек}^{-1}$, $T = 1 \text{ сек}$, $a = 2$. Определить устойчивость системы.

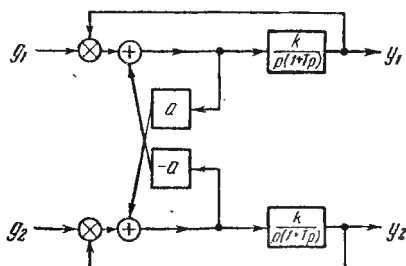


Рис. 97. Структурная схема двухканальной следящей системы к задаче 148.

Ответ. Система неустойчива. Следует отметить, что при отсутствии перекрестных связей (при $a = 0$) система устойчива при любых $K > 0$ и $T > 0$.

§ 3.4. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы

149. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_m p)(1 + T_y p)},$$

где $K = 75 \text{ сек}^{-1}$, $T_m = 0,02 \text{ сек}$, $T_y = 0,005 \text{ сек}$.

Определить устойчивость замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

Решение. Устойчивость системы будем определять по асимптотической л. а. х. и л. ф. х. Частоты излома асимптотической л. а. х. равны

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,005} = 200 \text{ сек}^{-1}.$$

Низкочастотная асимптота л. а. х. пересекает ось частот при частоте

$$\omega = K = 75 \text{ сек}^{-1}.$$

По этим данным строим асимптотическую л. а. х. (рис. 98). Фазовая частотная характеристика равна

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega) + \psi_3(\omega),$$

где $\psi_1(\omega) = -90^\circ$, $\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_m = -\arctg 0,02\omega$, $\psi_3(\omega) = -\arctg T_y \omega = -\arctg 0,005\omega$.

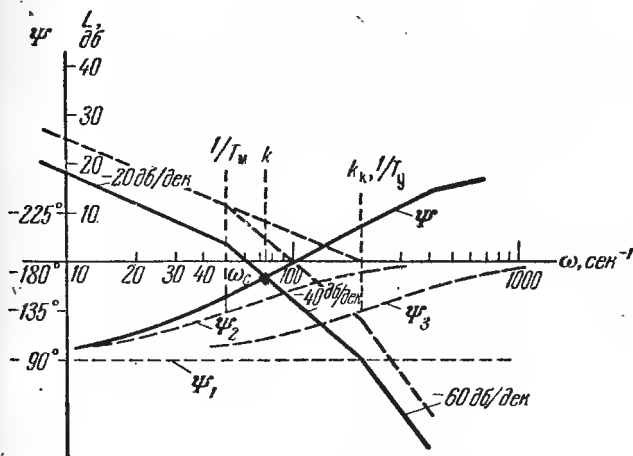


Рис. 98. Асимптотические л. а. х. и л. ф. х. к задачам 149 и 152.

Графики функции $\psi_2(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$ строим с помощью шаблона.

Л. ф. х. получаем графическим сложением функций $\psi_1(\omega)$, $\psi_2(\omega)$, $\psi_3(\omega)$ (см. рис. 98).

Л. ф. х. пересекает линию $\psi = -180^\circ$ при отрицательных значениях асимптотической л. а. х. Следовательно, замкнутая система устойчива.

В данной задаче л. ф. х. является монотонной функцией от частоты ω , поэтому задачу можно решить без построения л. ф. х.

После построения асимптотической л. а. х. определяем частоту среза разомкнутой системы $\omega = \omega_c = 60 \text{ сек}^{-1}$ (см. рис. 98).

Значение фазы при частоте среза

$$\psi(\omega_c) = -90^\circ - \arctg(0,02 \cdot 60) - \arctg(0,005 \cdot 60) =$$

$$= -157^\circ > -180^\circ.$$

Следовательно, замкнутая система устойчива.

150. Определить устойчивость системы, рассмотренной в задаче 149 при $T_y = 0,005 \text{ сек}$, $T_m = 0,02 \text{ сек}$, $K = 300 \text{ сек}^{-1}$.

Ответ. Система неустойчива.

151. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(1 + T_m p)(1 + T_y p)},$$

где $K = 300 \text{ сек}^{-1}$, $T_m = 0,02 \text{ сек}$, $T_y = 0,005 \text{ сек}$, $\tau = 0,0045 \text{ сек}$. Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

152. Для электромеханической следящей системы, рассмотренной в задаче 149, определить значение добротности системы, при котором система находится на колебательной границе устойчивости.

Решение. Логарифмическая фазовая характеристика определяется выражением

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega) + \psi_3(\omega),$$

где $\psi_1(\omega) = -90^\circ$, $\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_m$, $\psi_3 = -\arctg \omega T_y$.

Графики функций $\psi_2(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$ строим с помощью шаблона. Л. ф. х. получаем графическим сложением характеристик $\psi_1(\omega)$, $\psi_2(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$ (см. рис. 98).

Система находится на колебательной границе устойчивости, если л. а. х. пересекает ось частот при частоте пересечения л. ф. х. линии $\psi = -180^\circ$, $\omega = 100 \text{ сек}^{-1}$.

Асимптотическая л. а. х. системы в диапазоне частот $0 \div \frac{1}{T_m}$ имеет наклон -20 дб/дек , в диапазоне частот $\frac{1}{T_m} \div \frac{1}{T_y} - -40 \text{ дб/дек}$, в диапазоне частот $\frac{1}{T_y} \div \infty - -60 \text{ дб/дек}$. Зная наклоны асимптотической л. а. х., легко начертить асимптотическую л. а. х., пересекающую ось частот на частоте пересечения л. ф. х. линии $\varphi = -180^\circ$ (см. рис. 98). Добротность системы по скорости $K = K_k$ определяем по точке пересечения низкочастотной асимптоты л. а. х. с осью частот $K_k = 200 \text{ сек}^{-1}$.

Точное значение $K_k = 250 \text{ сек}^{-1}$. Ошибка в определении K_k объясняется отличием асимптотической л. а. х. от действительной.

153. Определить устойчивость замкнутой автоматической системы, если ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)},$$

где $K = 300 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,2 \text{ сек}$, $T_2 = 0,05 \text{ сек}$, $T_3 = 0,02 \text{ сек}$.

Ответ. Система неустойчива.

154. Для системы, рассмотренной в задаче 153, определить значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы K_k , при котором система находится на колебательной границе устойчивости.

Ответ. $K_k = 20 \text{ сек}^{-1}$.

155. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 76. Определить устойчивость системы, если $K = k_1 k_2 = 10$, $T_2 = 2 \text{ сек}$, $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $\tau = 0,1 \text{ сек}$.

Ответ. Система устойчива.

156. Передаточная функция одноосного гиросtabilизатора при коэффициенте демпфирования $\xi = 0$ в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_r^2 p^2)},$$

где $K = 40 \text{ сек}^{-1}$, $T_r = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.

Для демпфирования системы последовательно в цепь управления введено корректирующее звено с

передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{1 - Tp}{1 + Tp}.$$

Определить величину постоянной времени T , при которой гиростабилизатор будет устойчив.

Решение. На рис. 99 приведены асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. нескорректированной системы (сплошная линия). Для устойчивости системы необходимо,

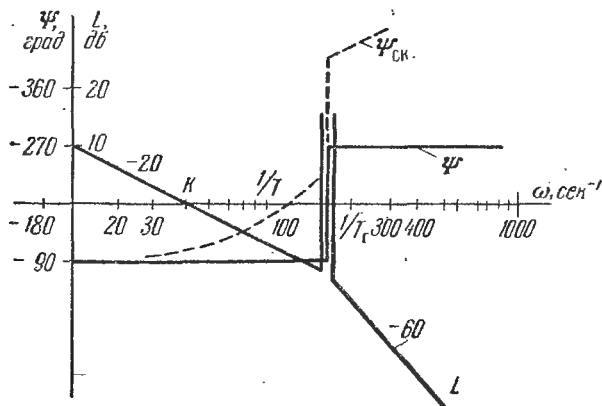


Рис. 99. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 156.

чтобы л. ф. х. пересекала линию $\psi = -180^\circ$ в диапазоне частот $K \div \frac{1}{T_r}$. Поэтому постоянную времени корректирующего звена необходимо выбирать из условия

$$K < \frac{1}{T} < \frac{1}{T_r}.$$

Система устойчива, например, при $T = 0,01$ сек.

157. Определить устойчивость одноосного гиростабилизатора, передаточная функция которого в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)},$$

где $K = 40 \text{ сек}^{-1}$, $T_r = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$, $\xi = 0,2$.

Ответ. Гиростабилизатор устойчив.

158. Определить устойчивость системы, структурная схема которой приведена на рис. 87, если $k_1 = 20$ в/град, $k_2 = 40$ в·сек·град⁻¹, $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,1$ сек, $T_0 = 2$ сек, $k_{\Pi} = 0,5$ град·в⁻¹, $k_0 = 1$.

Ответ. Асимптотическая и точная л. а. х. системы приведены на рис. 100. Система устойчива.

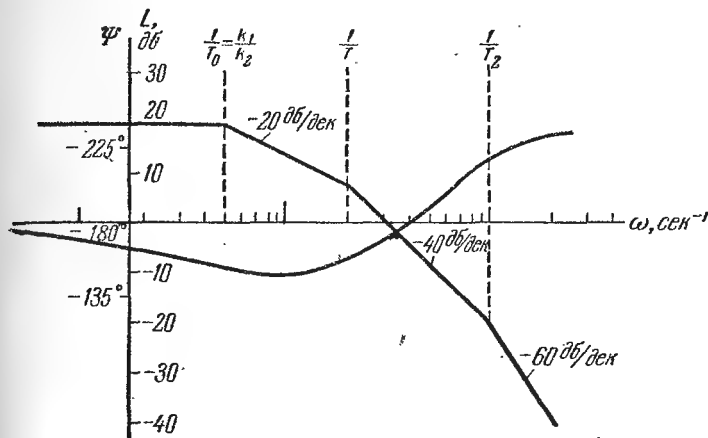


Рис. 100. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 158.

159. Решить предыдущую задачу при $k_1 = 20$ в/град, $k_2 = 100$ в·сек·град, $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,1$ сек, $T_0 = 2$ сек, $k_{\Pi} = 0,5$ град/в, $k_0 = 1$.

Ответ. Система неустойчива.

§ 3.5. Построение областей устойчивости

160. Передаточная функция статической системы автоматического управления в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где $T_2 = 0,2$ сек, $T_3 = 0,1$ сек.

Построить область устойчивости системы в плоскости параметров T_1 и K .

Решение. Характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} D(p) &= (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = \\ &= T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K = \\ &= 0,02 T_1 p^3 + (0,02 + 0,3 T_1) p^2 + (0,3 + T_1) p + K + 1. \end{aligned}$$

Для построения областей устойчивости найдем выражение для границ области устойчивости.

Для получения уравнений границы области устойчивости, соответствующих наличию в характеристическом

многочлене системы бесконечного и нулевого корня, приравняем нулю коэффициент при старшей степени характеристического многочлена и свободный член характеристического многочлена.

В результате получим следующие уравнения границ области устойчивости:

$$T_1 = 0, \quad (1)$$

$$K = -1. \quad (2)$$

Уравнение для границы области устойчивости, соответствующей нахождению системы на ко-

лебательной границе устойчивости, найдем, приравняв нулю предпоследний определитель Гурвица $\Delta_{n-1} = 0$.

В данной задаче это условие принимает вид

$$(0,02 + 0,3 T_1)(0,3 + T_1) = 0,02 T_1 (1 + K).$$

Отсюда получаем

$$K = \frac{(1 + 15 T_1)(15 + 50 T_1)}{T_1} - 1. \quad (3)$$

В соответствии с уравнениями (1), (2), (3), на рис. 101 построены границы области устойчивости. Линия, соответствующая уравнению $K = -1$, практически сливается с осью абсцисс.

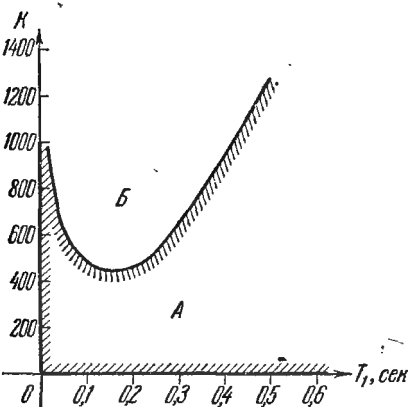


Рис. 101. Область устойчивости к задаче 159.

Областью устойчивости является область A (см. рис. 101), так как для любой из точек внутри этой области выполняется условие устойчивости.

161. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + 2\xi T p + T^2 p^2)},$$

где $T_1 = 0,2$ сек, $T = 1$ сек — постоянные времени исполнительного устройства и объекта; K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы; ξ — коэффициент демпфирования.

Построить область устойчивости замкнутой системы в плоскости параметров K, ξ .

Ответ. Область устойчивости системы приведена на рис. 102.

162. Передаточная функция одноосного гиросtabilизатора в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)},$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, ξ — коэффициент демпфирования, T_r — постоянная времени.

Построить область устойчивости одноосного гиросtabilизатора на плоскости параметров K, T_r для значений коэффициента демпфирования $\xi = 0,1$, $\xi = 0,2$, $\xi = 0,3$.

Ответ. Область устойчивости системы приведена на рис. 103.

163. На рис. 87 приведена структурная схема системы автоматической стабилизации летательного аппарата.

Постоянные времени привода исполнительного устройства $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,1$ сек. Постоянная времени объекта $T_0 = 2$ сек. Коэффициенты передачи привода исполнительного устройства и объекта $k_{\text{п}} = 0,5$ град/в, $k_0 = 1$.

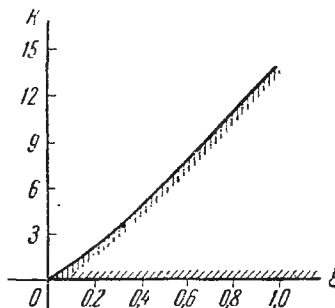


Рис. 102. Область устойчивости к задаче 160.

Построить область устойчивости системы на плоскости K_1, K_2 .

Решение. Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(-1 + T_0^2 p^2) + k_n k_0 (k_1 + k_2 p) = \\ = T_1 T_2 T_0^2 p^4 + (T_1 + T_2) T_0^2 p^3 + (T_0^2 - T_1 T_2) p^2 + \\ + (k_0 k_n k_2 - T_1 - T_2) p + k_0 k_n k_1 + 1. \end{aligned}$$

Найдем уравнения границ области устойчивости. Уравнение аperiодической границы устойчивости

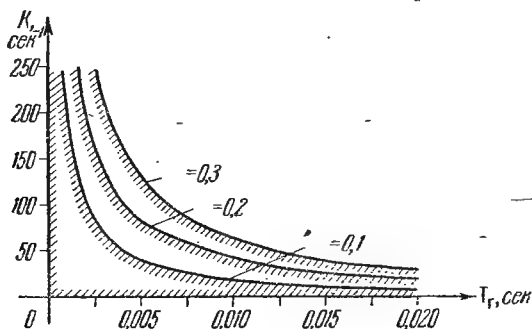


Рис. 103. Область устойчивости одноосного гидростабилизатора к задаче 161.

найдем, приравняв нулю свободный член характеристического уравнения. Тогда

$$k_1 = \frac{1}{k_0 k_n} = 2 \text{ в} \cdot \text{град}^{-1}. \quad (1)$$

Колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю характеристического комплекса

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0,$$

или

$$X(\omega) = k_0 k_n k_1 - 1 - (T_0^2 - T_1 T_2) \omega^2 + T_1 T_2 T_0^2 \omega^4 = 0, \quad (2)$$

$$Y(\omega) = (k_0 k_n k_2 - T_1 - T_2) \omega - (T_1 + T_2) T_0^2 \omega^3 = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) получаем

$$k_1 = \frac{1 + (T_0^2 - T_1 T_2) \omega^2 - T_1 T_2 T_0^2 \omega^4}{k_0 k_{\Pi}}. \quad (4)$$

В дальнейшем можно из (3) найти выражение для

$$k_2 = \frac{T_1 + T_2}{k_0 k_{\Pi}} + \frac{T_1 + T_2}{T_0^2} \omega^2. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) — уравнение границы устойчивости, записанное в параметрической форме.

В данной задаче проще поступить следующим образом.

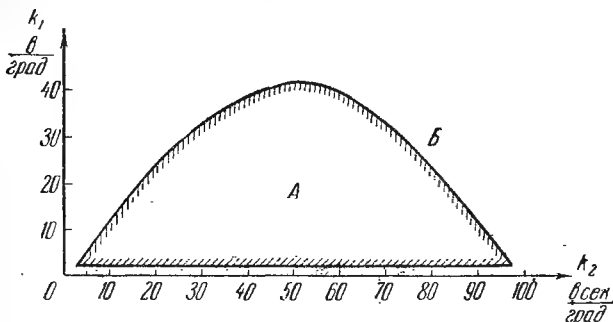


Рис. 104. Область устойчивости к задаче 162.

Из (3) найдем выражение для ω^2 и подставим его в (2). В результате получим уравнение параболы

$$k_1 = \frac{1}{k_0 k_{\Pi}} + \frac{(T_0^2 - T_1 T_2)(k_0 k_{\Pi} k_2 - T_1 - T_2)}{k_0 k_{\Pi} (T_1 + T_2) T_0^2} - \frac{T_1 T_2 (k_0 k_{\Pi} k_2 - T_1 - T_2)^2}{k_0 k_{\Pi} (T_1 + T_2)^2 T_0^2} = k_2 (-1,73 \cdot 10^{-2} k_2 + 1,7). \quad (6)$$

По уравнениям (1) и (6) на рис. 104 построена граница области устойчивости. Областью устойчивости является область A. Это можно проверить, применив любой критерий устойчивости к одной из точек, принадлежащих этой области.

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 4.1. Классический метод решения дифференциальных уравнений

164. Найти выходную величину $y(t)$ системы, описываемой уравнением

$$T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = g(t).$$

для двух случаев.

1. На вход системы подается задающее воздействие, изменяющееся по гармоническому закону

$$g(t) = G_m \sin \Omega t;$$

начальное условие $y(0) = y_0$.

2. При установившемся режиме, соответствующем задающему воздействию $g(t) = G_m \sin \Omega t$, происходит скачкообразный сдвиг фазы управляющего воздействия на $+90^\circ$; сдвиг происходит в момент, когда $\Omega t = 2\pi n$, где n — целое число.

Ответ.

$$1. y(t) = Y_m \sin(\Omega t - \psi) + (y_0 + Y_m \sin \psi) e^{-\frac{t}{T}},$$

$$Y_m = \frac{G_m}{\sqrt{1 + (\Omega T)^2}}, \quad \psi = \arctg \Omega T.$$

$$2. y(t) = Y_m \cos(\Omega t - \psi) - Y_m (\sin \psi + \cos \psi) e^{-\frac{t}{T}}.$$

165. Дана следящая система, представленная на рис. 105. На вход усилителя 1 подается разность между задающим воздействием g и выходной величиной y .

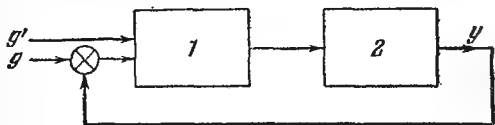


Рис. 105. Блок-схема следящей системы к задаче 165.

Кроме того, на усилитель подается первая производная g' задающего воздействия. 2 — двигатель, редуктор и исполнительный механизм.

Система описывается уравнением

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = (K\tau p + K)g(t). \quad (1)$$

Постоянная времени $T = 5$ мсек, коэффициент усиления по задающему воздействию $K = 40$ сек⁻¹, коэффициент усиления по производной задающего воздействия $K\tau = 0,8$. Найти закон изменения выходной величины y для двух следующих случаев.

1. При отработке системой рассогласования y_0 при отсутствии задающего воздействия и нулевой начальной скорости.

2. При задающем воздействии в виде единичной ступенчатой функции $1(t)$ и нулевых начальных условиях $y_{-0} = y'_{-0} = 0$.

Решение. 1. Дифференциальное уравнение системы для первого случая имеет вид

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = 0 \text{ или } (0,005p^2 + p + 40)y(t) = 0. \quad (2)$$

Характеристическое уравнение

$$0,005p^2 + p + 40 = 0 \quad (3)$$

имеет два вещественных корня — $p_1 = -55,3$ сек⁻¹, $p_2 = -144,7$ сек⁻¹.

Для случая вещественных корней решение уравнения (2) имеет вид

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (4)$$

где α_1 и α_2 — абсолютные значения корней характеристического уравнения.

Начальные условия:

при $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0, \\ y' &= y'_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= y_0, \\ -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из (6) находим

$$A_1 = \frac{\alpha_2 y_0}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1 y_0}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (7)$$

Решение задачи для первого случая имеет вид согласно (4) и (7):

$$y(t) = \frac{y_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}) 1(t)$$

или

$$y(t) = y_0 (1,619 e^{-55,3t} - 0,619 e^{-144,7t}) 1(t). \quad (8)$$

Выражение (8) можно также получить непосредственно по данным задачи, если воспользоваться приложением 10, где приведены решения однородных уравнений первой, второй и третьей степеней как при вещественных, так и при комплексных корнях.

2. Дифференциальное уравнение системы для второго случая может быть записано, согласно (1), в виде

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = (b_0 p + b_1) g(t), \quad (9)$$

где $a_0 = T = 0,005$ сек, $a_1 = 1$, $a_2 = K = 40$ сек⁻¹, $b_0 = K\tau = 0,8$, $b_1 = K = 40$ сек⁻¹.

Прежде всего найдем начальные условия, имеющие место непосредственно после воздействия на систему единичной ступенчатой функции.

Для этого удобно воспользоваться приложением 9. В соответствии с указанным приложением найдем из (9)

$n = 2, m = 1$ и получим

$$y_{+0} = y_{-0} = 0,$$

$$y'_{+0} = y'_{-0} + \frac{b_0}{a_0} 1(t) = 0 + \frac{0,8}{0,005} 1(t) = 160 \cdot 1(t) \text{ сек}^{-1}. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) удобно свести к решению однородного уравнения с теми же коэффициентами, перейдя к новой переменной

$$z(t) = y(t) - y_{\text{уст}}, \quad (11)$$

где

$$y_{\text{уст}} = \frac{b_m}{a_n} 1(t) = \frac{b_1}{a_2} 1(t) = 1(t) \quad (12)$$

— частное решение уравнения (9), т. е. установившееся значение выходной величины y . Таким образом, вместо (9) получаем уравнение

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) z(t) = 0 \quad (13)$$

при начальных условиях

$$z_{+0} = y_{+0} - y_{\text{уст}}, \quad z'_{+0} = y'_{+0}. \quad (14)$$

Эти соотношения получены из уравнения (11).

Решение (13) имеет вид

$$z(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (15)$$

где, согласно первому случаю, $\alpha_1 = 55,3 \text{ сек}^{-1}$, $\alpha_2 = 144,7 \text{ сек}^{-1}$.

Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 получаем из (15), согласно (10), (12) и (14), уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= z_{+0} = y_{+0} - y_{\text{уст}} \\ A_1 + A_2 &= -1(t), \\ -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 &= z'_{+0} = y'_{+0} \\ -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 &= 160 \cdot 1(t). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

или

или

Из (16) получаем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{-\alpha_2 + 160}{\alpha_2 - \alpha_1} 1(t) = 0,171 \cdot 1(t), \\ A_2 &= \frac{-\alpha_1 + 160}{\alpha_1 - \alpha_2} 1(t) = -1,171 \cdot 1(t). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Заметим, что решение уравнения (13) можно получить, используя приложение 10.

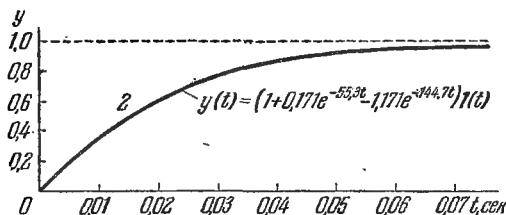
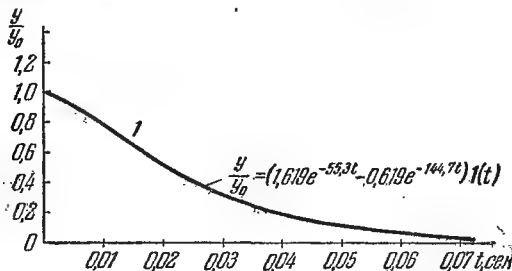


Рис. 106. Кривые переходных процессов к задаче 165;

1 — ненулевые начальные условия, 2 — реакция системы на ступенчатое воздействие.

Из (15) получим, согласно (11), (12) и (17),

$$y(t) = z(t) + y_{уст} = (0,171e^{-55,3t} - 1,171e^{-144,7t})1(t) + 1(t).$$

Таким образом, при воздействии на систему единичной ступенчатой функции $1(t)$ выходная величина изменяется по закону

$$y(t) = [1 + 0,171e^{-55,3t} - 1,171e^{-144,7t}]1(t). \quad (18)$$

По уравнению (8) на рис. 106 построена кривая 1, а по уравнению (18) — кривая 2.

166. Решить задачу 165 при следующих данных:

$$T = 0,005 \text{ сек}, \quad K = 200 \text{ сек}^{-1}, \quad K\tau = 0,8.$$

Ответ.

1. При согласовании системы ее закон движения

$$y(t) = 1,155 y_0 e^{-100t} \sin(173t + 60^\circ)$$

(кривая 1 на рис. 107).

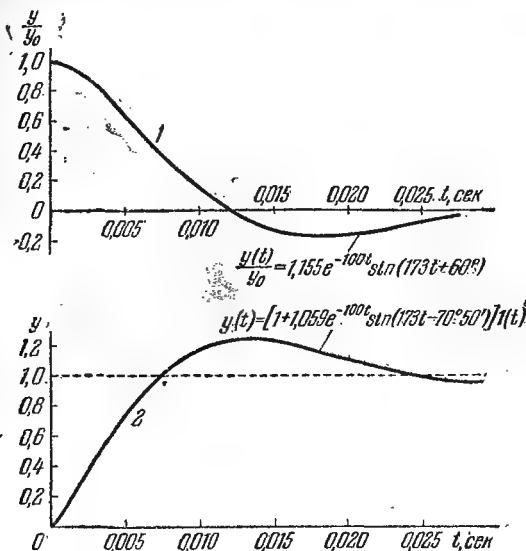


Рис. 107. Кривые переходных процессов к задаче 166;

1 — ненулевые начальные условия, 2 — реакция системы на ступенчатое воздействие.

2. При воздействии на систему единичной ступенчатой функции.

$$y(t) = [1 + 1,059 e^{-100t} \sin(173t - 70^\circ 50')] 1(t).$$

(кривая 2 на рис. 107).

167. Найти функцию веса $w(t)$: 1) для системы, представленной в задаче 165; 2) для системы, представленной в задаче 166.

Указание. Возможно использование переходных функций этих систем, полученных в задачах 165 и 166.

Ответ.

$$1) \quad w(t) = (169,2e^{-144,7t} - 9,45e^{-55,3t}) 1(t);$$

$$2) \quad w(t) = 212e^{-100t} \cos(173t - 40^\circ 50') 1(t).$$

168. Найти переходную функцию $h(t)$ и функцию веса $w(t)$ системы, описываемой уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = b_0 g(t).$$

Все коэффициенты уравнения положительны; $b_0 = a_2$, $a_1^2 > 4a_0 a_2$.

Ответ.

$$h(t) = \left(1 - \frac{a_2 e^{-\alpha_1 t} - a_1 e^{-\alpha_2 t}}{a_2 - a_1} \right) 1(t),$$

$$w(t) = \frac{a_1 a_2}{(a_2 - a_1)} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) 1(t),$$

где α_1 и α_2 — абсолютные значения корней характеристического уравнения системы.

169. Дана статическая система автоматического регулирования, описываемая уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = b_0 g(t),$$

где $a_0 = 0,002 \text{ сек}^2$, $a_1 = 0,12 \text{ сек}$, $a_2 = 5$, $b_0 = 4$.

Найти реакцию системы на ступенчатое воздействие $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$.

Ответ.

$$y(t) = g_0 [0,8 - e^{-30t} \sin(40t + 53^\circ 10')] 1(t).$$

170. Система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = (b_0 p + b_1) g(t), \quad (1)$$

где $a_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^2$, $a_1 = 0,105 \text{ сек}$, $a_2 = 2,16$, $a_3 = b_1 = 65,3 \text{ сек}^{-1}$, $b_0 = 1,16$.

Найти переходный процесс для двух случаев:

1. При включении системы после ее предварительного рассогласования на величину x_0 .

2. При задающем воздействии в виде единичной ступенчатой функции $y(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях $y_0 = y'_0 = y''_0 = 0$.

1. Решение для случая 1. Характеристическое уравнение, соответствующее (1), имеет при заданных коэффициентах вид

$$0,0005p^3 + 0,105p^2 + 2,16p + 65,3 = 0.$$

Корни уравнения (2) могут быть найдены каким-либо из известных методов. Эти корни равны

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\alpha = -180 \text{ сек}^{-1}, \\ p_{2,3} &= -\gamma \pm j\lambda = -10 \pm j25 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Выходная величина системы, характеристическое уравнение которой имеет один вещественный и пару комплексных корней, имеет вид

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \delta). \quad (4)$$

Начальные условия равны

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0. \quad (5)$$

Из (4) находим

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= -\alpha Ae^{-\alpha t} + Be^{-\gamma t} [\lambda \cos(\lambda t + \delta) - \gamma \sin(\lambda t + \delta)], \\ y''(t) &= \alpha^2 Ae^{-\alpha t} + Be^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \lambda^2) \sin(\lambda t + \delta) - \\ &\quad - 2\gamma\lambda \cos(\lambda t + \delta)]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из выражений (4) — (6) получаем систему уравнений для определения постоянных интегрирования A , B , δ :

$$\left. \begin{aligned} A + B \sin \delta &= y_0, \\ -\alpha A + B\lambda \cos \delta - \gamma B \sin \delta &= 0, \\ \alpha^2 A + B(\gamma^2 - \lambda^2) \sin \delta - 2\gamma\lambda \cos \delta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

После подстановки α , γ , λ согласно (3) найдем

$$A = 0,0246y_0, \quad B = 1,13y_0, \quad \delta = 59^\circ 50'. \quad (8)$$

Подстановка (8) в (4) дает решение задачи:

$$y(t) = y_0 [0,0246e^{-180t} + 1,13e^{-10t} \sin(25t + 59^\circ 50')].$$

Этот результат можно получить непосредственно из (2) и (5), если воспользоваться приложением 10.

2. Указание к решению задачи для второго случая. Начальные условия, имеющие место непосредственно после приложения ступенчатого воздействия, могут быть определены при помощи приложения 9.

Ответ.

$$y(t) = [1 + 0,0541e^{-180t} - 1,0541e^{-10t} \sin(25t + 88^\circ 15')] 1(t).$$

171. Найти переходный процесс в системе, данной в предыдущей задаче, при управляющем воздействии, нарастающем по линейному закону

$$g(t) = at 1(t).$$

Указание. Частное решение дифференциального уравнения системы, т. е. вынужденную составляющую переходного процесса, следует искать в виде

$$y_B = b + ct.$$

Ответ.

$$y(t) = a [t - 0,000302e^{-180t} - 0,0392e^{-10t} \sin(25t - 23^\circ 30') - 0,01532] 1(t).$$

172. Система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(a_0 p + a_1) y(t) = b_0 p g(t). \quad (1)$$

Найти переходный процесс в системе при помощи интеграла Дюамеля для двух видов управляющего воздействия:

$$1) \quad g(t) = at 1(t), \quad (2)$$

$$2) \quad g(t) = b(e^{-qt} - e^{-rt}) 1(t) \quad (3)$$

при нулевых начальных условиях.

Решение. Для случая $g(t) = at 1(t)$:

Интеграл Дюамеля может быть записан в виде

$$y(t) = g(0) \cdot h(t) + \int_0^t g'(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $h(t)$ — переходная функция системы.

Для определения $h(t)$ найдем реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие, т. е. решим уравнение

$$(a_0 p + a_1) y(t) = b_0 p 1(t) \quad (5)$$

при нулевых начальных условиях.

В соответствии с уравнением (5) найдем

$$y_{уст} = 0. \quad (6)$$

Используя приложение 9, найдем также

$$y_{+0} = y_{-0} + \frac{b_0}{a_0} 1(t) = \frac{b_0}{a_0} 1(t). \quad (7)$$

С учетом (6) и (7) решение уравнения (5) имеет вид

$$y(t) = A e^{-\frac{t}{T}} + y_{уст} = A e^{-\frac{t}{T}} + 1(t) \frac{b_0}{a_0} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (8)$$

где $T = \frac{a_0}{a_1}$.

Таким образом, переходная функция системы равна

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} e^{-\frac{t}{T}} 1(t). \quad (9)$$

Для линейного управляющего воздействия (2) имеем

$$g'(t) = a. \quad (10)$$

Подставим (9) и (10) в (4):

$$y(t) = \int_0^t a \frac{b_0}{a_0} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (11), находим ответ для первого случая задачи:

$$y(t) = a \frac{b_0}{a_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) 1(t).$$

Ответ для случая аperiodического управляющего воздействия (3):

$$y(t) = b \frac{b_0}{a_0} \frac{(r - qrT) e^{-rt} - (q - qrT) e^{-qT} + (q - r) e^{-\frac{t}{T}}}{T \left(\frac{1}{T} - q \right) \left(\frac{1}{T} - r \right)}.$$

173. Найти переходный процесс в системе, описываемой уравнением

$$(a_0 p + a_1) y(t) = b_0 g(t),$$

при затухающем колебательном задающем воздействии

$$g(t) = c e^{-rt} \sin \Omega t$$

и нулевых начальных условиях.

Указание. Предлагается применить интеграл Дюамеля.

Ответ.

$$y(t) = c \frac{b_0}{a_1} \frac{\left(\frac{1}{T} - r \right) e^{-rt} \sin \Omega t - \Omega e^{-rt} \cos \Omega t + \Omega e^{-\frac{t}{T}}}{T \left[\left(\frac{1}{T} - r \right)^2 + \Omega^2 \right]} 1(t),$$

где $T = \frac{a_0}{a_1}$.

§ 4.2. Применение изображений Лапласа и Карсона — Хевисайда

174. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического регулирования равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)} = \frac{20}{p(1 + 0,1p)}. \quad (1)$$

Найти переходную $h(t)$ и весовую $w(t)$ функции замкнутой системы.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы, с учетом (1), равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K}{Tp^2 + p + K} = \frac{20}{0,1p^2 + p + 20}. \quad (2)$$

Переходная функция $h(t)$ представляет собой реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$.

Изображение $Y(p)$ выходной величины $y(t)$ замкнутой системы при задающем воздействии $g(t)$, изображение которого равно $G(p)$, представляет собой при нулевых начальных условиях произведение

$$Y(p) = \Phi(p) G(p).$$

Изображение единичной ступенчатой функции по Карсону — Хевисайду равно 1, а по Лапласу $\frac{1}{p}$. Поэтому переходная функция $h(t)$ системы может быть получена как результат обратного преобразования по Карсону — Хевисайду передаточной функции замкнутой системы, т. е. выражения (2), либо как результат обратного преобразования по Лапласу произведения

$$\frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{20}{p(0,1p^2 + p + 20)}. \quad (3)$$

Для перехода от изображения (2) или (3) к искомому оригиналу $h(t)$ необходимо знаменатель изображения разложить на множители. Для этого приравняем знаменатель (2) нулю,

$$Tp^2 + p + K = 0 \quad \text{или} \quad 0,1p^2 + p + 20 = 0, \quad (4)$$

и найдем корни полученного уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\gamma + j\lambda = -5 + j13,2 \text{ сек}^{-1}, \\ p_2 &= -\gamma - j\lambda = -5 - j13,2 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Далее можно записать знаменатель выражения (2) в виде

$$\begin{aligned} 0,1p^2 + p + 20 &= 0,1(p - p_1)(p - p_2) = \\ &= 0,1[p - (-\gamma + j\lambda)][p - (-\gamma - j\lambda)] = \\ &= 0,1[(p + \gamma)^2 + \lambda^2] = 0,1[(p + 5)^2 + 13,2^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь вместо (3) получим

$$\frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{20}{0,1p[(p + 5)^2 + 13,2^2]} = \frac{200}{p[(p + 5)^2 + 13,2^2]}. \quad (7)$$

Из таблиц изображений функций по Лапласу (см. приложение 1) подбираем формулу, соответствующую выражению (7):

$$\frac{1}{p[(p+\gamma)^2 + \lambda^2]} \doteq \frac{1}{\gamma^2 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \psi),$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\gamma}. \quad (8)$$

При подборе формул следует иметь в виду, что в имеющихся справочниках эти формулы располагаются в порядке возрастания степени полинома от p в знаменателе изображения.

Для случая вещественных и для случая комплексных корней всегда предусматриваются отдельные формулы. Так, если бы корни знаменателя изображения (2) оказались вещественными, следовало бы вместо формулы (8) взять табличную формулу

$$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)} \doteq \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \right),$$

где α и β — абсолютные значения корней.

Сопоставляя (7) и (8), получаем оригинал выражения (7), т.е. переходную функцию системы,

$$h(t) \doteq \Phi(p) \doteq$$

$$\doteq \left[\frac{200}{5^2 + 13,2^2} - \frac{200}{13,2 \sqrt{5^2 + 13,2^2}} e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15') \right] 1(t),$$

или

$$h(t) = [1 - 1,068 e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15')] 1(t). \quad (9)$$

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на вычисление угла ψ по формуле (8), так как знаки в формулах для ψ , типичных для подобных выражений, записываются своеобразно. Знак числителя в выражении для тангенса ψ является знаком синуса ψ , а знак знаменателя является знаком косинуса ψ . Таким образом, формула для ψ содержит указание на квадрант, в котором находится этот угол. Это позволяет освободиться от двойственности в ответе для ψ , обусловленной совпадением тангенсов двух углов, отличающихся на π .

В рассматриваемом примере, где $\operatorname{tg} \psi = -\frac{13,2}{5} = -2,64$, из двух возможных значений ψ , равных $-69^\circ 15'$ и

+110°45', следует взять второе число, так как выражение $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{13,2}{-5}$ указывает, что угол находится во втором квадранте.

В результате из формулы (8) следует

$$\sin(\lambda t - \psi) = \sin(13,2t - 110^\circ 45') = -\sin(13,2t + 69^\circ 15'),$$

что и учтено при записи выражения (9).

Функция веса $w(t)$ системы может быть найдена как производная переходной функций (9) по времени.

Функция веса может быть найдена и непосредственно по передаточной функции (2), как ее обратное преобразование по Лапласу,

$$\begin{aligned} w(t) = L^{-1}[\Phi(p)] &= L^{-1}\left[\frac{20}{0,1p^2 + p + 20}\right] = \\ &= L^{-1}\left[\frac{200}{(p+5)^2 + 13,2^2}\right], \end{aligned} \quad (10)$$

либо как обратное преобразование по Карсону — Хевисайду произведения

$$p\Phi(p) = \frac{20p}{0,1p^2 + p + 20} = \frac{200p}{(p+5)^2 + 13,2^2}. \quad (11)$$

Подбираем из таблиц изображений функций по Лапласу формулу, соответствующую (10):

$$\frac{1}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t. \quad (12)$$

Согласно (7), (10) и (12) получаем функцию веса системы

$$w(t) = 15,15e^{-5t} \sin 13,2t \cdot 1(t). \quad (13)$$

175. Для замкнутой системы автоматического регулирования, данной в предыдущей задаче, найти закон изменения выходной величины $y(t)$ при отсутствии задающего воздействия, начальном рассогласовании $y(0) = y_0$ и нулевой начальной скорости.

Решение. Согласно уравнению (2) предыдущей задачи, дифференциальное уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = Kg(t), \quad (1)$$

где $g(t)$ — задающее воздействие. Для получения из (1) изображения выходной величины $y(t)$ необходимо использовать операторные выражения для производных с учетом начальных условий. Запишем эти выражения по Лапласу, полагая, что $Y(p)$ есть изображение функции $y(t)$

$$\left. \begin{aligned} py(t) &= y'(t) \doteq pY(p) - y(0), \\ p^2y(t) &= y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь $y(0)$ и $y'(0)$ — начальные значения выходной величины и ее производной. Из (1) и (2), учитывая, что $g(t) = 0$, получаем

$$Tp^2Y(p) - Tpy(0) - Ty'(0) + pY(p) - y(0) + KY(p) = 0,$$

или

$$Y(p) = \frac{(Tp + 1)y(0) + Ty'(0)}{Tp^2 + p + K}. \quad (3)$$

Подставляя значения начальных условий $y(0) = y_0$ и $y'(0) = 0$ и коэффициентов уравнения $T = 0,1$ сек и $K = 20$ сек⁻¹, получим

$$Y(p) = \frac{(0,1p + 1)y_0}{0,1p^2 + p + 20} = \frac{(0,1p + 1)y_0}{0,1[(p + 5)^2 + 13,2^2]} = \frac{(p + 10)y_0}{(p + 5)^2 + 13,2^2}. \quad (4)$$

Подходящая табличная формула (по Лапласу)

$$\frac{(p + \delta)}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2} \doteq \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\delta - \gamma)^2 + \lambda^2} e^{-\gamma t} (\lambda t + \psi), \quad (5)$$

$$\psi = \arctg \frac{\lambda}{\delta - \gamma}.$$

Из изображения (4) на основании формулы (5) получим

$$y(t) = y_0 \frac{\sqrt{(10 - 5)^2 + 13,2^2}}{13,2} e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15')$$

или

$$y(t) = y_0 1,068 e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15').$$

З а м е ч а н и я. Применение табличных формул типа формулы (5) не является единственным способом перехода от изображения функции к ее оригиналу. Возможно, например, использование теоремы разложения.

До перехода к оригиналу $y(t)$ можно произвести проверку правильности изображения $Y(p)$ по некоторым признакам. Возможна, в частности, проверка изображения по его размерности. Изображение по Карсону — Хевисайду какой-либо функции, например $y(t)$,

$$Y(p) = p \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt, \quad (6)$$

имеет ту же размерность, что и оригинал $y(t)$. Это видно, например, из того, что изображение ступенчатой функции по Карсону — Хевисайду равно самой функции, т. е. $Al(t) \doteq A$ при $t \geq 0$. Из выражения (6) следует, что аргумент p изображения имеет размерность время^{-1} . Размерность изображения функции по Лапласу

$$Y(p) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt \quad (7)$$

равна размерности оригинала, умноженной на время, т. е. отличается от размерности изображения (6) по Карсону — Хевисайду множителем время .

Применим эти сведения о размерностях к проверке изображения по Лапласу (3) координаты y исследуемой системы. Правая часть выражения (3) должна иметь размерность произведения $\text{координата} \times \text{время}$. Учитывая, что размерность p — это время^{-1} , находим, что все слагаемые числителя выражения (3) имеют размерность координаты, а знаменателя — время^{-1} . Следовательно, проверка по размерности дает положительный результат.

Перейдем к другим видам проверки изображения.

Непосредственно по выражению (3) можно найти начальное значение оригинала

$$y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p). \quad (8)$$

Применяя (8) к (3), получаем $y(0) = \frac{T}{T} y(0)$.

По выражению (3) можно найти также предел оригинала $y(t)$ при $t \rightarrow \infty$, если этот предел существует, по формуле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p). \quad (9)$$

Признаком наличия указанного предела оригинала является расположение всех полюсов изображения $Y(p)$ только в левой полуплоскости комплексного переменного p , т. е. вещественные части всех корней знаменателя функции $Y(p)$ должны быть отрицательными. Для выражения (3) это условие выполняется. Применяя (9) к (3), находим $y(\infty) = \frac{0}{K} = 0$, что заведомо правильно, так как из физических соображений следует, что в рассматриваемой задаче установившаяся ошибка равна нулю.

Указанные виды проверки полученного изображения дают лишь необходимые условия правильности результата; однако практически эти условия часто являются и достаточными.

176. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{3}{(1 + 0,2p)(1 + 0,01p)}.$$

Найти переходную функцию замкнутой системы.

Ответ.

$$h(t) = (0,750 + 0,341e^{-80t} - 1,091e^{-25t}) 1(t).$$

177. Для системы предыдущей задачи найти закон движения при отсутствии задающего воздействия при начальных условиях $y(0) = y_0$ и $y'(0) = y'_0$.

Указание. Решение является суммой двух слагаемых, одно из которых пропорционально y_0 , а другое — y'_0 ; эти слагаемые удобно найти отдельно и результаты сложить.

Ответ.

$$y(t) = y_0 [1,455e^{-25t} - 0,455e^{-80t}] + 0,0182y'_0 [e^{-25t} - e^{-80t}].$$

178. Для замкнутой следящей системы с передаточной функцией (см. задачу 174)

$$\Phi(p) = \frac{20}{0,1p^2 + p + 20}$$

найти закон движения при задающем воздействии в виде ступенчатой функции $\bar{g}_0 1(t)$ и при начальных условиях $y(0) = y_0$ и $y'(0) = 0$.

Ответ.

$$y(t) = g_0[1 - 1,068e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15')] + \\ + y_0 1,068e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15').$$

179. Для следящей системы, которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)} = \frac{24}{p(1 + 0,0067p)},$$

найти выходную величину $y(t)$ при задающем воздействии в виде ступенчатой функции $g(t) = g_0 1(t)$ и при начальных условиях $y(0) = y_0$ и $y'(0) = y'_0$.

Ответ.

$$y(t) = g_0[1 - 1,333e^{-30t} + 0,333e^{-120t}] + \\ + y_0[1,333e^{-30t} - 0,333e^{-120t}] + 0,0111y'_0[e^{-30t} - e^{-120t}].$$

180. Найти закон изменения выходной величины $y(t)$ замкнутой следящей системы при ступенчатом задающем воздействии $1(t)$ и нулевых начальных условиях. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}. \quad (1)$$

Решение. Находим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p) + K(1 + T_2 p)} = \\ = \frac{15p + 500}{0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500}. \quad (2)$$

Изображение по Карсону — Хевисайду искомой реакции системы на ступенчатое воздействие имеет вид

$$X(p) = \Phi(p). \quad (3)$$

Далее, независимо от предполагаемого способа перехода от (3) к оригиналу, необходимо найти корни знаменателя изображения (2), т. е. корни уравнения

$$0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500 = 0. \quad (4)$$

В результате расчета, который здесь не приводится, получаем следующие корни уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -39,2 \text{ сек}^{-1}, \\ p_2 &= (-68,8 + j128,5) \text{ сек}^{-1}, \\ p_3 &= (-68,8 - j128,5) \text{ сек}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если теперь знаменатель изображения (2) представить, с учетом (5), в виде произведения

$$\begin{aligned} 0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500 &= \\ &= 0,0006(p + 39,2)[(p + 68,8)^2 + 128,5^2], \end{aligned}$$

то перейти к оригиналу можно при помощи таблиц изображений.

Здесь используем другой способ перехода к оригиналу — при помощи теоремы разложения. Пусть искомая функция $y(t)$ имеет следующее изображение по Карсону — Хевисайду:

$$Y(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_{m-1}p + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n}, \quad (6)$$

причем $m \leq n$ и уравнение $D(p) = 0$ не имеет нулевых и кратных корней. Тогда согласно теореме разложения оригинал $y(t)$ может быть найден по формуле

$$y(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{p_k D'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7)$$

где $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$ — корни уравнения, а $D'(p) = \frac{d}{dp} D(p)$. В соответствии с (2) и (3), запишем

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{15p + 500}{0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500} = \\ &= \frac{25\,000(p + 33,3)}{p^3 + 176,6p^2 + 26\,700p + 833\,000}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сопоставляя (8) и (6), находим

$$\left. \begin{aligned} B(p) &= 25\,000(p + 33,3), & B(0) &= 833\,000, \\ D(p) &= p^3 + 176,6p^2 + 26\,700p + 833\,000, \\ D(0) &= 833\,000, & D'(p) &= 3p^2 + 353p + 26\,700. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Согласно теореме разложения (7) получим

$$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^3 \frac{25\,000(p_k + 33,3)}{p_k(3p_k^2 + 353p_k + 26\,700)} e^{p_k t}. \quad (10)$$

Вычислим отдельно слагаемые, находящиеся в (10) под знаком суммы. При $p_1 = -39,2 \text{ сек}^{-1}$ получим

$$\frac{B(p_1)}{p_1 D'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{-147\,500}{-39,2 \cdot 17\,430} e^{-39,2t} = 0,216 e^{-39,2t}. \quad (11)$$

При $p_2 = (-68,8 + j128,5) \text{ сек}^{-1} = 146 e^{j118^\circ 10'} \text{ сек}^{-1}$ получим

$$\begin{aligned} \frac{B(p_2)}{p_2 D'(p_2)} e^{p_2 t} &= \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot 133,5 e^{j105^\circ 25'}}{146 e^{j118^\circ 10'} \cdot 3,4 \cdot 10^4 e^{-j166^\circ 53'}} e^{(-68,8 + j128,5)t} = \\ &= 0,672 e^{j(154^\circ 8')} e^{-68,8t} e^{j128,5t} = 0,672 e^{j(128,5t + 154^\circ 8')} e^{-68,8t}. \end{aligned} \quad (12)$$

При $p_3 = (-68,8 - j128,5) \text{ сек}^{-1} = 146 e^{j118^\circ 10'} \text{ сек}^{-1}$ получим

$$\frac{B(p_3)}{p_3 D'(p_3)} e^{p_3 t} = 0,672 e^{-j(128,5t + 154^\circ 8')} e^{-68,8t}. \quad (13)$$

Выражение (13) записано без расчета, непосредственно по виду выражения (12), так как корни p_2 и p_3 сопряженные, а коэффициенты в выражении (10) чисто вещественные. При этих условиях комплексные выражения (12) и (13) заведомо являются сопряженными.

Если бы все корни уравнения (4) были вещественными, то выражения (11)–(13) не содержали бы комплексных чисел и расчет можно было бы закончить подстановкой этих выражений в формулу (10).

В данном случае выражения (12) и (13) являются комплексными, поэтому их следует преобразовать. Применяя к сумме сопряженных выражений (12) и (13) формулу Эйлера

$$\frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} = \cos \alpha,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{B(p_2)}{p_2 D'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{B(p_3)}{p_3 D'(p_3)} e^{p_3 t} &= \\ &= 0,672 e^{-68,8t} [e^{j(128,5t + 154^\circ 8')} + e^{-j(128,5t + 154^\circ 8')}] = \\ &= 1,345 e^{-68,8t} \cos(128,5t + 154^\circ 8') = \\ &= -1,345 e^{-68,8t} \cos(128,5t - 25^\circ 52'). \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка функций (11) и (14) в формулу (10) дает реакцию системы на ступенчатое воздействие $1(t)$:

$$y(t) = [1 + 0,216e^{-39,2t} - 1,345e^{-68,8t} \cos(128,5t - 25^\circ 52')] 1(t). \quad (15)$$

Отдельные слагаемые этого уравнения и кривая $y(t)$ построены на рис. 108.

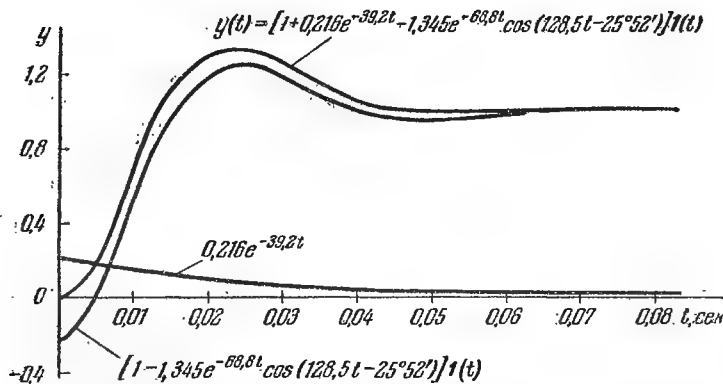


Рис. 108. Переходный процесс в следящей системе с астатизмом первого порядка при ступенчатом задающем воздействии.

181. Для замкнутой следящей системы, приведенной в предыдущей задаче, найти в общем виде изображение $Y(p)$ по Лапласу и Карсону — Хевисайду выходной величины $y(t)$ через изображение $G(p)$ задающего воздействия при ненулевых начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ и $y''(0) = y''_0$.

Ответ. Изображение по Лапласу

$$\begin{aligned} Y(p) = L[y(t)] = & [(15p + 500)G(p) + (6 \cdot 10^{-4}p^2 + 0,106p + 16)y_0 + \\ & + (6 \cdot 10^{-4}p + 0,106)y'_0 + 6 \cdot 10^{-4}y''_0] \times \\ & \times [6 \cdot 10^{-4}p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500]^{-1}. \end{aligned}$$

Изображение по Карсону — Хевисайду

$$Y(p) = [(15p + 500)G(p) + p(6 \cdot 10^{-4}p^2 + 0,106p + 16)y_0 + \\ + p(6 \cdot 10^{-4}p + 0,106)y'_0 + 6 \cdot 10^{-4}py''_0] \times \\ \times [6 \cdot 10^{-4}p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500]^{-1}.$$

182. Найти закон движения системы, приведенной в задачах 180 и 181, при отсутствии задающего воздействия и начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$ и $y''(0) = 0$.

Ответ.

$$y(t) = y_0[1,221e^{-39,2t} + 0,335e^{-68,8t} \sin(128,5t - 41^\circ 45')].$$

183. Следящая система, приведенная в задаче 180, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2p)}{p(1 + T_1p)(1 + T_3p)} = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}.$$

Найти выходную величину $y(t)$ замкнутой следящей системы при задающем воздействии в виде импульсной функции $A\delta(t)$ при нулевых начальных условиях; $\delta(t)$ — единичная импульсная функция. Найти функцию веса $w(t)$ системы.

Ответ.

$$y(t) = A[-8,46e^{-39,2t} + 196,4e^{-68,8t} \sin(128,5t + 2^\circ 30')];$$

$$w(t) = \frac{1}{A} y(t).$$

184. Для замкнутой следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)} = \frac{24}{p(1 + 0,0067p)},$$

найти выходную величину $y(t)$ при линейном задающем воздействии $g(t) = at1(t)$ и нулевых начальных условиях.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{3600}{p^2 + 150p + 3600}. \quad (1)$$

Изображение задающего воздействия по Лапласу

$$G(p) = \frac{a}{p^2}. \quad (2)$$

Согласно (1) и (2) изображение выходной величины по Лапласу равно

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{3600a}{p^2(p^2 + 150p + 3600)}. \quad (3)$$

Для отыскания оригинала выражения (3) можно использовать теорему свертывания, согласно которой

$$y(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

если

$$Y(p) = X_1(p) X_2(p) \quad (5)$$

и

$$x_1(t) \doteq X_1(p), \quad (6)$$

$$x_2(t) \doteq X_2(p). \quad (7)$$

В соответствии с (5) изображение (3) следует разбить на два сомножителя с таким расчетом, чтобы произведение их оригиналов легко интегрировалось. Выберем эти сомножители следующим образом:

$$Y(p) = \frac{3600}{p(p^2 + 150p + 3600)} \cdot \frac{a}{p},$$

т. е.

$$X_1(p) = \frac{3600}{p(p^2 + 150p + 3600)} = \frac{3600}{p(p+30)(p+120)}, \quad (8)$$

$$X_2(p) = \frac{a}{p}. \quad (9)$$

Знаменатель выражения (8) разложен на множители обычным путем. Для выражений (8) и (9) подбираем подходящие формулы из таблицы изображений по Лапласу

$$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)} \doteq \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{p} \doteq 1(t). \quad (11)$$

Теперь из (6) — (11) найдем

$$x_1(t) = (1 - 1,333e^{-30t} + 0,333e^{-120t}) 1(t), \quad (12)$$

$$x_2(t) = a 1(t). \quad (13)$$

Подставим оригиналы (12) и (13) в формулу (4) теоремы свертывания:

$$y(t) = \int_0^t [1 - 1,333e^{-30\tau} + 0,333e^{-120\tau}] \cdot [a 1(t - \tau)] d\tau. \quad (14)$$

Интегрируем (14):

$$y(t) = a [\tau + 0,0445e^{-30\tau} - 0,00277e^{-120\tau}]_0^t.$$

Отсюда искомое решение задачи:

$$y(t) = a(t + 0,0445e^{-30t} - 0,00277e^{-120t} - 0,0417) 1(t).$$

Задающее воздействие $g(t)$ и выходная величина $y(t)$ построены на рис. 109.

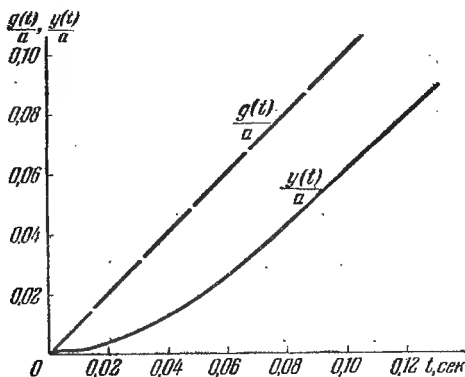


Рис. 109. Переходный процесс в следящей системе с астатизмом первого порядка при линейном задающем воздействии.

185. Передаточная функция разомкнутой следящей системы равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} = \frac{24}{p(1+0,0067p)}.$$

Найти ошибку $x(t) = g(t) - y(t)$ замкнутой следящей системы при нулевых начальных условиях для задающего воздействия двух видов:

- 1) при ступенчатом воздействии $g(t) = g_0 1(t)$;
- 2) при задающем воздействии, нарастающем по линейному закону $g(t) = at 1(t)$.

Указание. Передаточная функция следящей системы относительно ошибки равна

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)}.$$

Ответ.

$$1) x(t) = g_0 (1,333e^{-30t} - 0,333e^{-120t}) 1(t),$$

$$2) x(t) = a (0,0417 - 0,0445e^{-30t} - 0,00277e^{-120t}) 1(t).$$

Ошибка для обоих случаев построена на рис. 110.

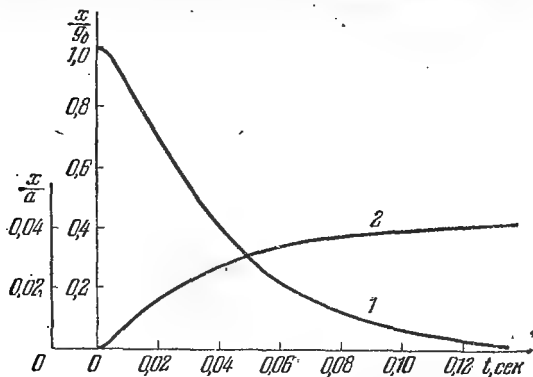


Рис. 110. Графики ошибки следящей системы с астатизмом первого порядка при ступенчатом (кривая 1) и линейном (кривая 2) задающих воздействиях. Правая шкала оси ординат относится к кривой 1; левая шкала — к кривой 2.

186. Следящая система, схема которой дана на рис. 111, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) = \frac{k_1}{1 + T_p p} \cdot \frac{k_2}{p}.$$

Система состоит из двух звеньев, между которыми прикладывается возмущение $f(t)$. Найти выходную величину $y(t)$ для ступенчатого возмущения $f(t) = f_0 1(t)$ при отсутствии задающего воздействия $g(t)$ и нулевых начальных условиях; $K = k_1 k_2 = 24 \text{ сек}^{-1}$, $T = 6,7 \text{ мсек}$, $k_2 = 0,01 \text{ в}^{-1} \text{сек}^{-1}$. Последний коэффициент записан

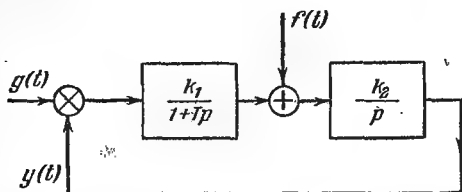


Рис. 111. Структурная схема следящей системы к задачам 186 и 188.

в предположении, что координаты $y(t)$ и $g(t)$ безразмерные, а входные величины второго звена, в том числе возмущение $f(t)$, имеют размерность напряжения.

Ответ.

$$y(t) = 10^{-4} f_0 [4,17 - 4,45e^{-30t} + 0,278e^{-120t}] 1(t).$$

187. Следящая система состоит из двух звеньев, показанных на рис. 111;

$$W(p) = \frac{k_1 k_2}{p(1+Tp)} = \frac{100}{p(1+0,025p)}.$$

На вход второго звена действует возмущение в виде импульсной функции $f(t) = A\delta(t)$; задающее воздействие $g(t)$ отсутствует, начальные условия нулевые. Найти выходную величину $y(t)$ замкнутой следящей системы.

Ответ.

$$y(t) = k_2 A 1,053 e^{-20t} \sin(60t - 71^\circ 34') 1(t).$$

188. Передаточная функция разомкнутой следящей системы равна

$$W(p) = \frac{K(1+Tp)}{p^2},$$

где $K = 400 \text{ сек}^{-2}$, $T = 0,01 \text{ сек}$. Найти выходную величину $y(t)$ замкнутой системы при ступенчатом, задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$ и нулевых начальных условиях.

Ответ.

$$y(t) = g_0 [1 + 1,053e^{-20t} \sin(60t - 71^\circ 34')] 1(t).$$

189. Даны две следящие системы, имеющие в разомкнутом состоянии передаточные функции:

$$1) \quad W_1(p) = \frac{K_1}{p(1 + T_1 p)},$$

$$2) \quad W_2(p) = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{p^2},$$

где $K_1 = 100 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 25 \text{ мсек}$, $K_2 = 4000 \text{ сек}^{-2}$, $T_2 = 10 \text{ мсек}$. Найти выходные величины $y(t)$ и ошибки

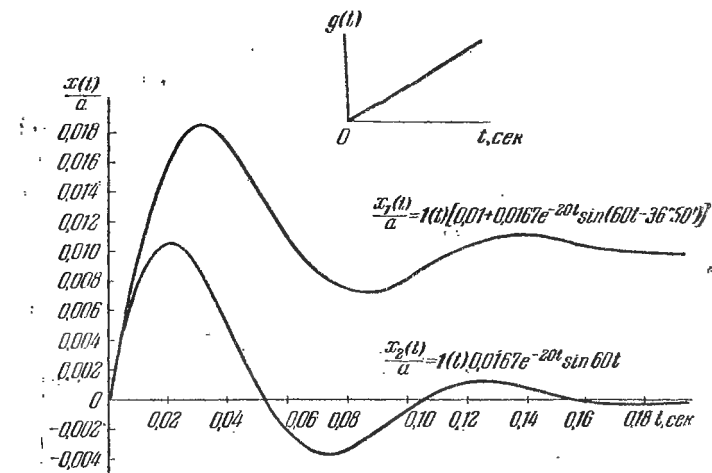


Рис. 112. Ошибки при задающем воздействии $g(t) = at \cdot 1(t)$ для следящих систем с астатизмом первого порядка $x_1(t)$ и с астатизмом второго порядка $x_2(t)$.

$x(t) = g(t) - y(t)$ замкнутых следящих систем при линейном управляющем воздействии, $g(t) = at 1(t)$, и нулевых начальных условиях. Построить на одном графике кривые ошибок для этих систем.

Ответ.

$$y_1(t) = a[t - 0,01 - 0,0167e^{-20t} \sin(60t - 36^\circ 50')] 1(t),$$

$$x_1(t) = a[0,01 + 0,0167e^{-20t} \sin(60t - 36^\circ 50')] 1(t),$$

$$y_2(t) = a[t - 0,0167e^{-20t} \sin 60t] 1(t),$$

$$x_2(t) = a0,0167e^{-20t} \sin 60t 1(t).$$

Кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ построены на рис. 112.

190. Замкнутая система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(0,1479p^4 + 3,7p^3 + 15,61p^2 + 17,9p + 20)y(t) = \\ = (17,9p + 20)g(t).$$

Найти выходную величину $y(t)$ при ступенчатом задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$ и нулевых начальных условиях.

Ответ.

$$y(t) = g_0[1 + 1,456e^{-0,5t} \sin(1,2t - 72^\circ) + \\ + 0,398e^{-4t} - 0,019e^{-20t}] 1(t).$$

191. Найти выходную величину $y(t)$ системы, данной в предыдущей задаче, при отсутствии задающего воздействия и начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, $y''(0) = y''_0$ и $y'''(0) = y'''_0$.

Ответ.

$$y(t) = y_0[1,202e^{-0,5t}(1,2t - 45^\circ) + 0,155e^{-4t} - 0,005e^{-20t}] + \\ + y'_0[1,112e^{-0,5t} \sin(1,2t - 4^\circ 50') + 0,099e^{-4t} - 0,005e^{-20t}] + \\ + y''_0[0,283e^{-0,5t} \sin(1,2t - 19^\circ 30') + 0,096e^{-4t} - 0,002e^{-20t}] + \\ + y'''_0[0,288e^{-0,5t} \sin(1,2t - 22^\circ 15') + 0,114e^{-4t} - 0,004e^{-20t}].$$

192. Найти переходную $h(t)$ и весовую $w(t)$ функции системы, передаточная функция которой равна

$$\Phi(p) = \frac{K}{(p + a)^n},$$

где n — целое положительное число.

У к а з а н и е. Следует воспользоваться теоремой свертывания.

Ответ.

$$h(t) = K \left[\frac{1}{a^n} - e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{a^{n-k} k!} \right],$$

$$\omega(t) = \frac{K}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}.$$

§ 4.3. Приближенные методы расчета переходных процессов

А. Использование вещественных частотных характеристик [31, 32]

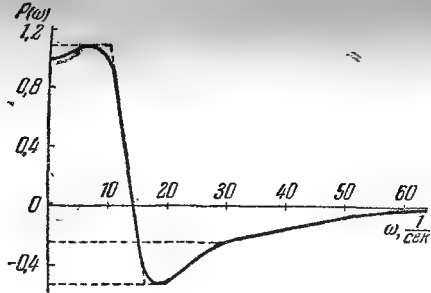
193. По вещественной частотной характеристике $P(\omega)$ системы регулирования (рис. 113, а) построить кривую переходного процесса при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях.

Решение. Кривая $P(\omega)$ приближенно заменяется несколькими трапецеидальными кривыми с таким расчетом, чтобы сумма ординат трапеций равнялась ординате вещественной частотной характеристики $P(\omega)$. В данном случае можно взять четыре трапеции, показанные на рис. 113, б; одна из них положительная, остальные отрицательные. Каждая трапеция должна иметь типовой вид, показанный на рис. 113, в; тогда она полностью определяется тремя числами: частотой среза ω_c , коэффициентом наклона $\chi = \omega_d/\omega_c$ и высотой r . Трапеции на рис. 113, б имеют параметры, указанные в табл. 1.

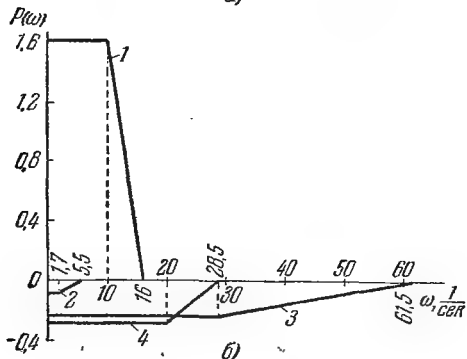
Таблица 1

№ трапеции	1	2	3	4
$\chi = \frac{\omega_d}{\omega_c}$	0,62	0,31	0,46	0,70
$\omega_c, \text{сек}^{-1}$	16	5,5	61,5	28,5
r	1,62	-0,09	-0,24	-0,29

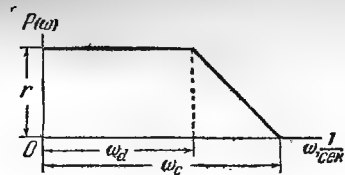
Далее следует воспользоваться таблицами функций $h(t_0)$.



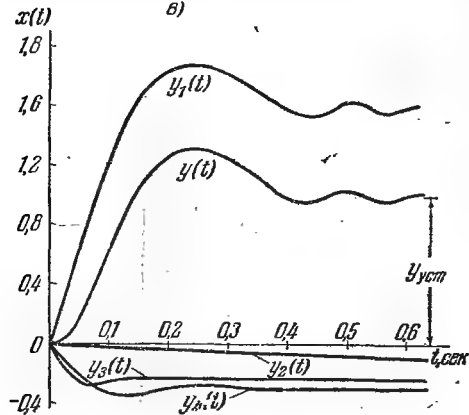
a)



б)



в)



г)

Рис. 113. Приближенная замена вещественной частотной характеристики суммой трапецеидальных функций частоты и получение кривой переходного процесса.

Функция $h(t_0)$ представляет собой кривую переходного процесса системы, вещественная частотная характеристика которой — единичная трапеция, имеющая $r = +1$ и $\omega_c = 1 \text{ сек}^{-1}$. Табличные функции $h(t_0)$ приводятся для различных коэффициентов наклона $0 \leq \chi \leq 1$, причем допускается интерполяция, если χ лежит между двумя табличными значениями. Сокращенная таблица таких функций дана в приложении 35.

Возьмем таблицу $h(t_0)$ функций для $\chi = 0,62$ (коэффициент наклона трапеции 1) и выпишем ряд значений времени t_0 и функции $h(t_0)$ (см. первые две строки в табл. 2). Для получения точек кривой $y(t)$ переходного процесса, соответствующего неединичной трапеции, каждое значение функции $h(t_0)$ следует умножить на высоту трапеции r , а время t_0 разделить на частоту среза ω_c , т. е.

$$y(t) = r h\left(\frac{t_0}{\omega_c}\right).$$

В третьей и четвертой строках табл. 2 даны числа t и $y_1(t)$ для трапеции 1.

Аналогично получаем $y_2(t)$, $y_3(t)$ и $y_4(t)$ для остальных трапеций (см. таблицы 3—5). По данным таблиц 2—5 на рис. 113, *г* построены графики $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ и $y_4(t)$. Складывая ординаты этих кривых с учетом их знаков, получаем на рис. 113, *г* кривую $y(t)$ переходного процесса в заданной системе при единичном ступенчатом воздействии. На рисунке указана также величина $y_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

В случае неединичного ступенчатого воздействия $g(t) = g_0 1(t)$ ординаты кривой $y(t)$ следует умножить на g_0 .

194. По вещественной частотной характеристике системы регулирования (рис. 114, *а*) построить кривую переходного процесса $y(t)$ при задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$ и нулевых начальных условиях.

Ответ. Кривую $P(\omega)$ можно заменить двумя трапециями, показанными на рис. 114, *а* пунктиром. Данные трапеции 1: $\chi = 0,78$, $\omega_c = 79 \text{ сек}^{-1}$, $r = 0,688$; данные трапеции 2: $\chi = 0,84$, $\omega_c = 95 \text{ сек}^{-1}$, $r = 0,2$.

Таблица 2

Трапеция 1

t_0	0	0,2	0,4	0,8	1,0	1,6	2,6	3,0	4,0
$h(t_0)$	0	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,04	1,11	1,16
$t, \text{сек}$	0	0,0125	0,025	0,050	0,0625	0,100	0,162	0,188	0,250
$y_1(t)$	0	0,17	0,33	0,65	0,81	1,21	1,68	1,80	1,88
t_0	4,4	4,8	5,4	6,0	7,0	7,8	9,0	10	
$h(t_0)$	1,15	1,12	1,07	1,01	0,95	0,94	0,96	1,00	
$t, \text{сек}$	0,275	0,300	0,337	0,375	0,438	0,488	0,562	0,625	
$y_1(t)$	1,86	1,82	1,73	1,64	1,54	1,52	1,56	1,62	

Таблица 3

Трапеция 2

$t, \text{сек}$	0	0,109	0,218	0,364	0,546	0,728	0,822	1,09	1,27
$y_2(t)$	0	-0,022	-0,043	-0,067	-0,086	-0,096	-0,098	-0,096	-0,094

Таблица 4

Трапеция 3

$t, \text{сек}$	0	0,0065	0,0163	0,026	0,0325	0,0488
$y_3(t)$	0	-0,043	-0,108	-0,163	-0,194	-0,25
$t, \text{сек}$	0,065	0,0813	0,0976	0,114	0,13	
$y_3(t)$	-0,271	-0,269	-0,254	-0,242	-0,235	

Таблица 5

Трапеция 4

$t, \text{сек}$	0	0,014	0,028	0,042	0,070	0,105	0,133	0,176
$y_4(t)$	0	-0,064	-0,122	-0,467	-0,267	-0,328	-0,339	-0,314
$t, \text{сек}$	0,210	0,246	0,281	0,316	0,351	0,386	0,456	
$y_4(t)$	-0,284	-0,27	-0,27	-0,284	-0,296	-0,302	-0,290	

По этим трапециям построены кривые $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на рис. 114, б; на этом же рисунке дана искомая функция $y(t)$ для случая $g_0 = 1$. При $g_0 \neq 1$ ординаты кривой $y(t)$ следует умножить на g_0 .

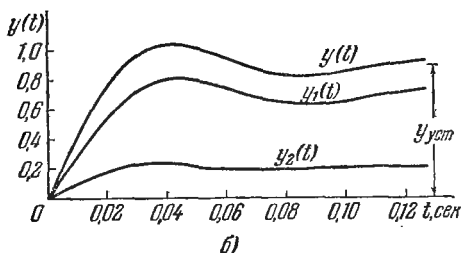
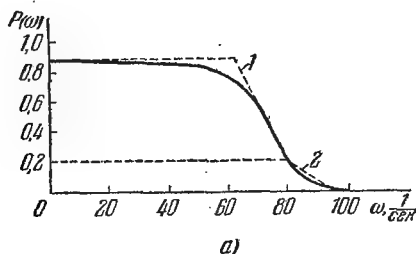


Рис. 114. Вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ и кривые переходного процесса $x(t)$ к задаче 194.

195. Построить кривую $y(t)$ переходного процесса замкнутой системы при задающем воздействии $g(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 + T_3 p)}{(-1 + 2T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + T_2 p)(1 + T_4 p)} = \frac{5(1 + 0,03p)}{(-1 + 0,2p + 0,01p^2)(1 + 0,05p)(1 + 0,006p)} *$$

Указание. Возможно использование результатов решения задач 73 (Б) и 79.

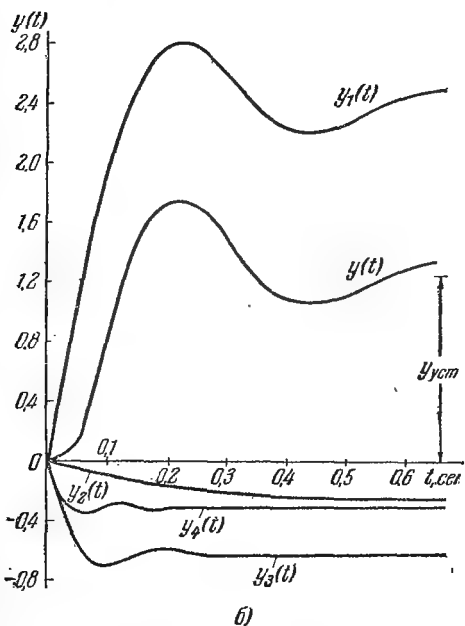
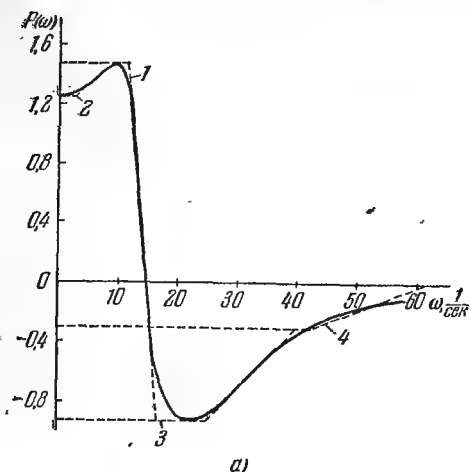


Рис. 115. Вещественная частотная характеристика и кривая переходного процесса к задаче 195.

Ответ. См. рис. 115, б. Кривые $y_{1,2,3,4}(t)$ построены по четырем трапециям, показанным на рис. 115, а.

196. Построить кривую $y(t)$ переходного процесса замкнутой системы при задающем воздействии $g(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях.

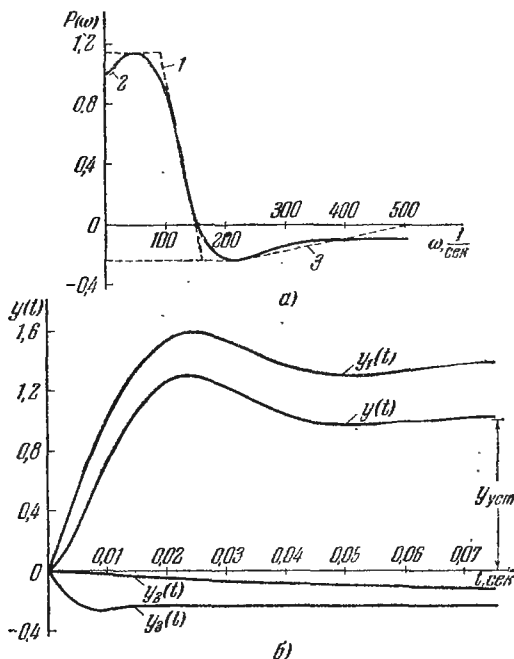


Рис. 116. Вещественная частотная характеристика и кривая переходного процесса к задаче 196.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}.$$

Указание. Возможно использование результатов решения задач 67 и 77.

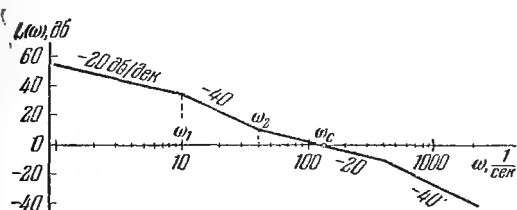
Ответ. См. рис. 116, б. Кривые $y_{1,2,3}(t)$ построены по трем трапециям, показанным на рис. 116, а.

Б. Использование сопрягающих частот л. а. х. [32]

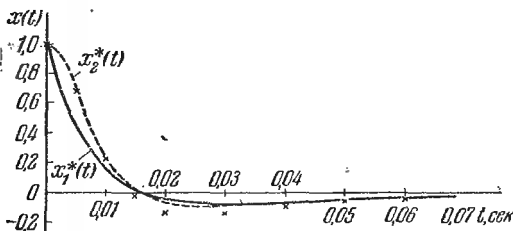
197. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}, \quad (1)$$

где $K = 500 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $T_2 = 0,025 \text{ сек}$, $T_3 = 0,0025 \text{ сек}$. Построить приближенную кривую ошибки $x(t) = g(t) - y(t)$ системы при единичном ступенчатом воздействии $g(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях. Построение произвести по сопрягающим частотам логарифмической амплитудной частотной характеристики.



а)



б)

Рис. 117. Л. а. х. и кривая переходного процесса к задаче 197.

Решение. Л. а. х. системы построена на рис. 117, а. Эта л. а. х. удовлетворяет условию, состоящему в том, что протяженность ее участка, пересекающего ось частот с наклоном -20 дБ/дек , должна составлять не менее одной декады; поэтому построение искомой кривой по сопрягающим частотам л. а. х. является возможным.

Определяем частоту среза л. а. х. непосредственно по л. а. х. или по формуле $\omega_c = K \frac{T_2}{T_1}$, следующей из рисунка; $\omega_c = 125 \text{ сек}^{-1}$.

В соответствии с методом использования сопрягающих частот л. а. х., отбрасываем в л. а. х. всю ее часть, лежащую правее частоты среза, и заменяем ее горизонтальным участком, совпадающим с осью частот. Этой новой преобразованной л. а. х. соответствует передаточная функция

$$W^*(p) = \frac{K(1 + T_2 p) \left(1 + \frac{1}{\omega_c} p\right)}{p(1 + T_1 p)}, \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} W^*(p) &= \frac{KT_2 \frac{1}{\omega_c} \left(\frac{1}{T_2} + p\right) (\omega_c + p)}{T_1 p \left(\frac{1}{T_1} + p\right)} = \\ &= \frac{(p + \omega_2)(p + \omega_c)}{p(p + \omega_1)} = \frac{(p + 40)(p + 125)}{p(p + 10)}, \end{aligned} \quad (2')$$

где $\omega_1 = 1/T_1$, $\omega_2 = 1/T_2$.

Формулам (2) и (2') соответствует преобразованная передаточная функция системы относительно ошибки

$$\Phi^*(p) = \frac{1}{W^*(p)} = \frac{p(p + 10)}{(p + 40)(p + 125)}. \quad (3)$$

Учитывая изображение Лапласа $G(p) = \frac{1}{p}$ для воздействия $g(t) = 1(t)$, находим изображение Лапласа для первого приближения $x_1^*(t)$ функции $x(t)$

$$X(p) = \Phi^*(p) G(p) = \frac{p + 10}{(p + 40)(p + 125)}. \quad (4)$$

Из таблиц изображений по Лапласу находим подходящую формулу:

$$\frac{p + \delta}{(p + \alpha)(p + \beta)} = \frac{(\delta - \alpha)e^{-\alpha t} - (\delta - \beta)e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) дают ответ для первого приближения ошибки системы:

$$x_1^*(t) = 1,353e^{-12t} - 0,353e^{-40t}. \quad (6)$$

Эта функция построена сплошной линией на рис. 117, б.

Для получения второго приближения $x_2^*(t)$ искомого решения следует ординаты кривой $x_1^*(t)$ умножить на поправочный коэффициент ρ в диапазоне $T_3 < t < T_2$, т. е. $0,0025 \text{ сек} < t < 0,025 \text{ сек}$. Этот коэффициент определяется из формулы

$$\rho = \left| \frac{W^*(p)}{1 + W(p)} \right|_{p=j\omega_c}$$

или, согласно (1) и (2),

$$\begin{aligned} \rho &= \left| \frac{\frac{(p+40)(p+125)}{p(p+10)}}{1 + \frac{500(1+0,025p)}{p(1+0,1p)(1+0,0025p)}} \right|_{p=j125} = \\ &= \left| \frac{(j125+40)(j125+125)(j125+400)}{50\,000(j125+40) + j125(j125+10)(j125+400)} \right| = 1,485. \end{aligned}$$

Второе приближение решения построено на рис. 117, б пунктиром. На этом же рисунке крестиками отмечены точки, относящиеся к точному решению.

В. Использование нормированных кривых для минимально-фазовых систем с типовыми л. а. х. [2, 4, 5]

198. Передаточная функция разомкнутой следящей системы равна

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+T_4p)} = \frac{100(1+0,160p)}{p^2(1+0,024p)(1+0,004p)}.$$

Построить график выходной величины $y(t)$ при ступенчатом задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$, $g_0 = 10 \text{ град}$ и нулевых начальных условиях.

Решение. Строим логарифмическую амплитудную характеристику заданной системы (рис. 118, а). Согласно приложению 19 находим, что эта л. а. х. является типовой симметричной, тип 2-1-2-3. Базовая частота $\omega_0 = \sqrt{K} = \sqrt{100} = 10 \text{ сек}^{-1}$.

По приведенной в приложении 19 формуле находим показатель колебательности системы

$$M = \frac{m+1}{m-1} = \frac{5,7+1}{5,7-1} \approx 1,4,$$

где

$$m = \frac{T_2}{\sum_{i=3}^n T_i} = \frac{T_2}{T_2 + T_4} = \frac{0,16}{0,024 + 0,004} \approx 5,7.$$

При $M \approx 1,4$ искомая кривая $y(t)$ переходного процесса должна быть построена как промежуточная между

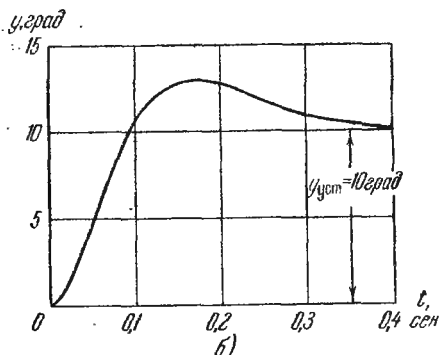
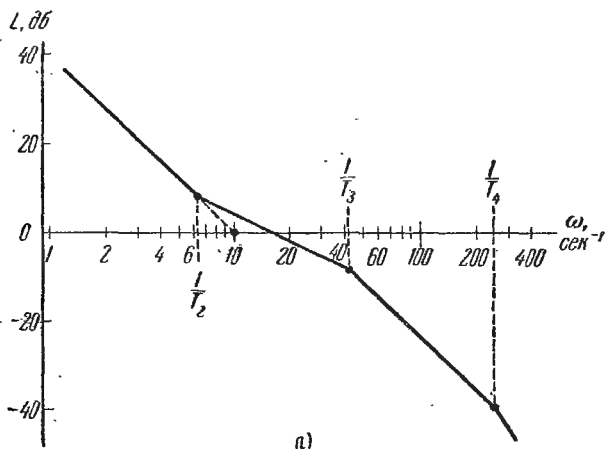


Рис. 118. Л. а. х. и кривая переходного процесса к задаче 198.

нормированными кривыми, приведенными для $M = 1,3$ и $M = 1,5$ в приложении 20, рис. П. 12. При переходе от

нормированной кривой $\frac{y}{g_0}(\omega_0 t)$ переходного процесса к $y(t)$ следует абсциссы нормированной кривой разделить на $\omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$, а ординаты умножить на $g_0 = 10 \text{ град}$.

В результате получаем кривую $y(t)$, построенную на рис. 118, б.

199. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{250(1 + 0,024p)}{(1 + 0,2p)^2(1 + 0,0024p)(1 + 0,0016p)}.$$

Построить кривую $y(t)$ переходного процесса в замкнутой системе при задающем воздействии $g(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях.

Ответ. Кривая $y(t)$ переходного процесса может быть получена приближенно из нормированной кривой переходного процесса для симметричной л. а. х. при $M = 1,4$; базовая частота $\omega_0 = 79 \text{ сек}^{-1}$.

200. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{400(1 + 0,04p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,003p)(1 + 0,0008p)^2}.$$

Построить кривую переходного процесса $y(t)$ в замкнутой системе при ступенчатом задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$, $g_0 = 0,5$ и нулевых начальных условиях.

Ответ. Кривая $y(t)$ может быть приближенно построена по нормированной кривой $\frac{y}{g_0}(\omega_0 t)$ для $M = 1,3$; базовая частота $\omega_0 = 63,2 \text{ сек}^{-1}$.

201. К следящей системе, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)},$$

$K = 400 \text{ сек}^{-2}$, $T_2 = 0,078 \text{ сек}$, $T_3 = 0,020 \text{ сек}$, прилагается при нулевых начальных условиях задающее воздействие $g(t) = a \cdot t \cdot 1(t)$, $a = 20 \text{ град/сек}$. Построить график ошибки воспроизведения этого задающего воздействия.

Решение. Строим л. а. х. системы (см. $L_1(\omega)$ на рис. 119, а). Л. а. х. относится к типу 2-1-2... (см.

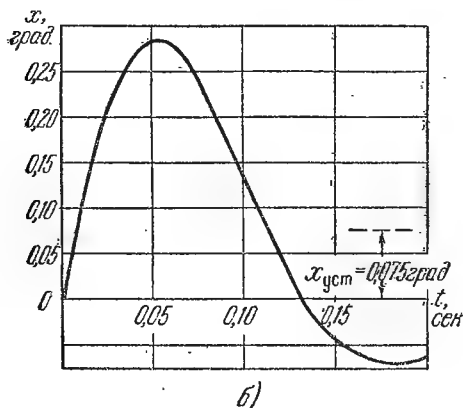
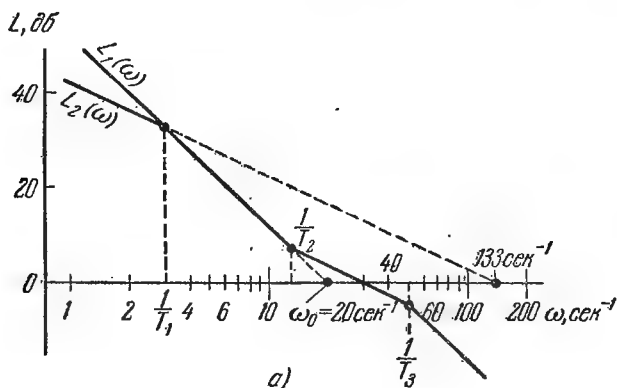


Рис. 119. Логарифмические амплитудные характеристики и кривая ошибки воспроизведения линейного задающего воздействия к задачам 201 и 202.

последнюю строку табл. 1 приложения 19). Базовая частота л. а. х. $\omega_0 = \sqrt{K} = \sqrt{400} = 20 \text{ сек}^{-1}$. Показатель колебательности

$$M = \frac{m+1}{m-1} = \frac{4,9}{2,9} = 1,7,$$

где

$$m = \frac{T_2}{\sum_{i=3}^n T_i} = \frac{T_2}{T_3} = 3,9.$$

Искомая кривая ошибки системы определяется нормированной кривой ошибки воспроизведения линейного задающего воздействия, приложение 20, рис. П. 14 (часть Б, случай 1).

Искомая кривая ошибки $x(t)$ (см. рис. 119, б) получается из нормированной кривой для $M = 1,7$ делением абсцисс последней на величину $\omega_0 = 20 \text{ сек}^{-1}$ и умножением ординат на отношение $a/\omega_0 = 10/20 = 0,5 \text{ град}$. Ошибка стремится к нулю, поскольку система обладает астатизмом второго порядка.

202. К следящей системе, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)},$$

где $K = 133 \text{ сек}^{-1}$, $T = 0,333 \text{ сек}$, $T_2 = 0,078 \text{ сек}$, $T_3 = 0,020 \text{ сек}$, прикладывается при нулевых начальных условиях задающее воздействие $g(t) = a \cdot t \cdot 1(t)$, $a = 20 \text{ град/сек}$. Построить график ошибки воспроизведения этого воздействия.

Ответ. Приближенное решение имеет вид графика на рис. 119, б, полученного из нормированной кривой приложения 20, соответствующей л. а. х. системы $L_2(\omega)$, изображенной на рис. 119, а. Установившаяся ошибка равна

$$x_{\text{уст}} = \frac{a}{K} = \frac{10}{133} = 0,075 \text{ град} = 4,5 \text{ угл. мин.}$$

203. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}.$$

1. Использовать нормированные кривые переходных процессов для построения графика выходной величины $y(t)$ замкнутой системы при единичном ступенчатом задающем воздействии и нулевых начальных условиях.

2. Решить эту же задачу точно (классическим или операторным методом), а также используя вещественную частотную характеристику системы.

Построить все три решения на одном графике.

У к а з а н и е. Во второй части задачи можно воспользоваться решениями задач 180 и 196.

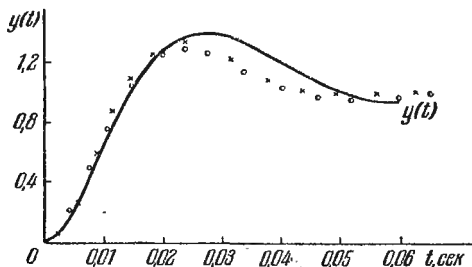


Рис. 120. Кривые переходного процесса к задаче 203, полученные тремя способами:

по нормированным кривым $\frac{y}{g_0}(\omega_0 t)$ — сплошная линия, с помощью точного решения — крестики и по вещественной частотной характеристике — кружки.

Ответ. На рис. 120 построена кривая $y(t)$, найденная приближенно по нормированным кривым переходных процессов, при $\omega_0 = 70,7 \text{ сек}^{-1}$ и $M = 1,5$. Точки, относящиеся к точному решению, отмечены крестиками, а точки, полученные по вещественной частотной характеристике, кружками.

Г. Построение кривой переходного процесса графическим методом

204. Построить график выходной величины $y(t)$ в системе, описываемой уравнением

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_0 g(t) \quad \text{или} \quad 2 \frac{dy}{dt} + 20y = 5g(t), \quad (1)$$

где задающее воздействие $g(t)$ задано графически на рис. 121, а. Размерности $y(t)$ и $g(t)$ одинаковы. Начальное условие $y(0) = -2$. Использовать графический метод Д. А. Башкирова [3].

Решение. Запишем (1) в виде $T \frac{dy}{dt} + y = g_1(t)$, где постоянная времени $T = a_0/a_1 = 2/20 = 0,1$ сек, а возмущающее воздействие $g_1(t) = (b_0/a_1) g(t) = 0,25g(t)$. Построим на рис. 121, б две системы координат: $t, y(t)$

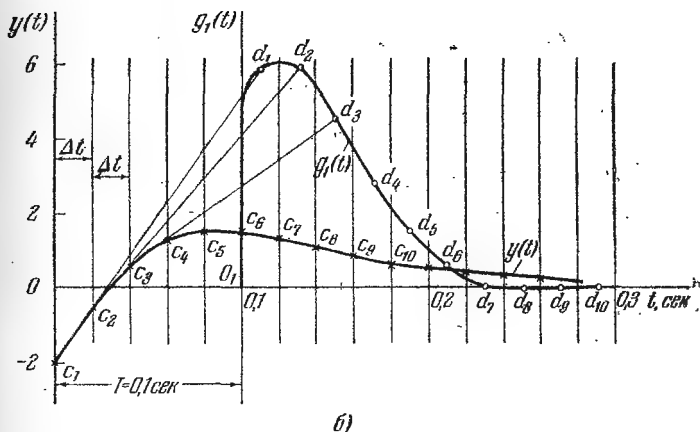
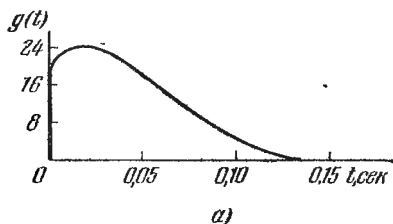


Рис. 121. Построение кривой переходного процесса $y(t)$ графическим методом.

и $t, g_1(t)$, имеющие одинаковые масштабы, причем оси времени обеих систем совмещены, но начало O_1 отсчета $g_1(t)$ сдвинуто вправо относительно начала O отсчета $y(t)$ на величину T . Построим согласно формуле для $g_1(t)$ и рис. 121, а функцию $g_1(t)$.

Выбираем шаг интегрирования $\Delta t = T/n$, где n — целое число. Возьмем $\Delta t = 0,020$ сек и разделим графики

на рис. 121, б на участки по 0,020 сек. На графике функции $g_1(t)$ отметим точками $d_1, d_2, d_3, \dots$ значения этой функции, имеющие место в середине каждого участка. Отложим на графике $y(t)$ начальное значение $y(0) = -2$ и соединим прямой линией полученную точку c_1 с точкой d_1 . Пересечение прямой c_1d_1 с абсциссой конца первого участка дает вторую точку c_2 искомой кривой. Проводя прямую c_2d_2 , получаем точку c_3 на пересечении этой прямой с абсциссой конца второго участка и т. д. Искомая функция $y(t)$ определяется как плавная кривая, соединяющая точки $c_1, c_2, c_3, \dots$

205. Построить график выходной величины $y(t)$ в системе, описываемой уравнением

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_0 g(t), \quad a_0 = 1 \text{ сек}, \quad a_1 = 20, \quad b_0 = 12$$

при $y(0) = 0,25$ и задающем воздействии $g(t)$, задан-

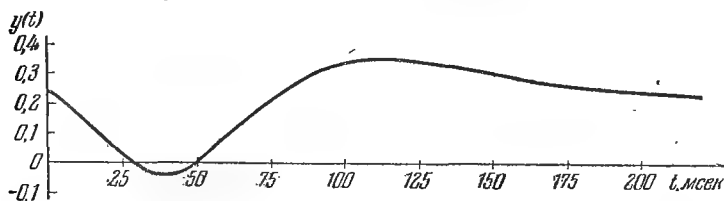


Рис. 122. Кривая переходного процесса к задаче 205.

ном в виде таблицы задающее воздействие имеет размерность выходной величины)

$t, \text{мсек}$	0	5	10	15	20	25	30	35	45	50
$g(t)$	0	-0,300	-0,466	-0,584	-0,640	-0,637	-0,559	-0,350	+0,300	+0,575

$t, \text{мсек}$	60	65	75	85	100	115	125	140	160	∞
$g(t)$	+0,900	+0,968	+1,000	+0,950	+0,759	+0,564	+0,472	+0,387	+0,350	+0,334

Ответ. См. рис. 122.

206. Построить график выходной величины в системе, описываемой уравнением

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 g(t),$$

$$a_0 = 0,048 \text{ сек}^2, \quad a_1 = 0,4 \text{ сек}, \quad a_2 = 10, \quad b_0 = 5$$

при $y(0) = -1,5$, $y'(0) = 75 \text{ сек}^{-1}$ и задающем воздействии $g(t)$, показанном на рис. 123, а.

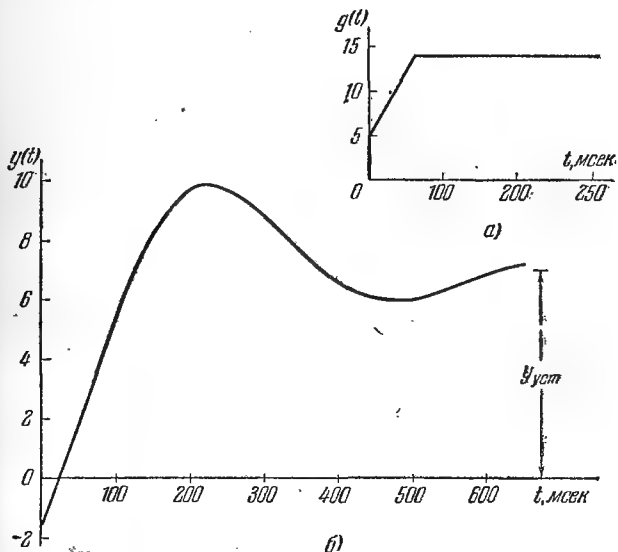


Рис. 123. Управляющее воздействие $g(t)$ и выходная величина $y(t)$ системы задачи 206.

Указание. Заданное уравнение следует привести к виду

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_2 \frac{dy}{dt} + y = g_1(t)$$

Ответ. См. рис. 123, б.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 5.1. Определение точности
при наличии задающего воздействия

207. Передаточная функция замкнутой следящей системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Каковы условия получения: 1) астатизма нулевого порядка; 2) астатизма первого порядка; 3) астатизма второго порядка?

Ответ.

1) $b_m \neq a_n$;

2) $b_m = a_n$; $b_{m-1} \neq a_{n-1}$;

3) $b_m = a_n$, $b_{m-1} = a_{n-1}$, $b_{m-2} \neq a_{n-2}$.

208. Передаточная функция разомкнутой следящей системы рис. 124 имеет вид

$$W(p) = \frac{A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \dots + A_{m-1} p + A_m}{B_0 p^n + B_1 p^{n-1} + \dots + B_{n-1} p + B_n}.$$

Каковы условия получения: 1) астатизма нулевого порядка; 2) астатизма первого порядка; 3) астатизма второго порядка?

Ответ.

1) $B_n \neq 0$;

2) $B_n = 0$;

3) $B_n = 0$ и $B_{n-1} = 0$.

209. Передаточная функция разомкнутой следящей системы рис. 124 имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Определить первые три коэффициента ошибки, а также добротность по скорости.

Решение. Находим передаточную функцию относительно ошибки:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} =$$

$$= \frac{p(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)+K}.$$



Рис. 124. Следящая система.

Разлагаем это выражение в ряд делением числителя на знаменатель

$$\left. \begin{aligned} & \frac{p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1T_2p^3}{p + \frac{1}{K}p^2 + \frac{T_1+T_2}{K}p^3 + \frac{T_1T_2}{K}p^4} \Bigg| \frac{K + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1T_2p^3}{\frac{1}{K}p + \frac{1}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)p^2 + \dots} \\ & - \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)p^2 + \left(T_1T_2 - \frac{T_1+T_2}{K}\right)p^3 - \frac{T_1T_2}{K}p^4 \end{aligned} \right\}$$

Далее можем написать тождество

$$c_0 + c_1p + \frac{c_2}{2}p^2 + \dots = \frac{1}{K}p + \frac{1}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)p^2 + \dots$$

Отсюда получаем коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{K} [\text{сек}], \quad \frac{c_2}{2} = \frac{1}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right) [\text{сек}^2].$$

Добротность по скорости:

$$K_\Omega = \frac{1}{c_1} = K [\text{сек}^{-1}].$$

210. Для предыдущей задачи определить численные значения коэффициентов ошибок, если $K = 100 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,01 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,005 \text{ сек}$.

Ответ. $c_1 = 0,01 \text{ сек}$ и $\frac{c_2}{2} = 0,00005 \text{ сек}^2$.

211. Определить величину установившейся ошибки для предыдущей задачи при движении следящей системы со скоростью $\Omega = 12 \text{ град/сек}$.

Ответ.

$$\theta_{уст} = \frac{\Omega}{K_{\Omega}} = c_1 \Omega = 0,01 \cdot 12 = 0^{\circ},12 = 7',2.$$

212. Передаточная функция замкнутой системы (см. рис. 124) имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{5p + 200}{0,001p^3 + 0,502p^2 + 6p + 200}.$$

Найти установившееся значение ошибки (после затухания переходного процесса) при изменении входной величины по закону

$$g(t) = 5 + 20t + 10t^2.$$

Решение. Находим передаточную функцию относительно ошибки:

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{0,001p^3 + 0,502p^2 + p}{0,001p^3 + 0,502p^2 + 6p + 200}.$$

Делением числителя на знаменатель (см. задачу 209) находим коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{200} \text{ сек} \quad \text{и} \quad \frac{c_2}{2} = 0,00236 \text{ сек}^2.$$

Далее находим производные

$$g'(t) = 20 + 20t,$$

$$g''(t) = 20.$$

Выражение для ошибки имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 g(t) + c_1 g'(t) + \frac{c_2}{2} g''(t) = \\ &= \frac{20 + 20t}{200} + 20 \cdot 0,00236 = 0,1472 + 0,1t. \end{aligned}$$

213. Передаточная функция разомкнутой системы (см. рис. 124) имеет вид

$$W(p) = \frac{50(1 + 0,15p)}{p^2(1 + 0,02p)}.$$

Определить первые три коэффициента ошибки, а также добротность по скорости и добротность по ускорению.

Ответ.

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \frac{c_2}{2} = 0,02 \text{ сек}^2;$$

добротность по скорости $K_\Omega \rightarrow \infty$, добротность по ускорению $K_\varepsilon = 50 \text{ сек}^{-2}$.

214. В статической системе регулирования (рис. 125, а) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Определить коэффициент передачи $\psi(p) = m$ неединичной обратной связи, при котором система приобретает

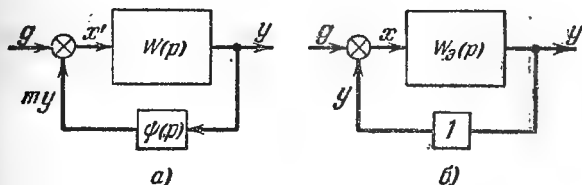


Рис. 125. Статическая система с неединичной обратной связью.

астизм первого порядка, и передаточную функцию разомкнутой эквивалентной системы с единичной обратной связью (см. рис. 125, б).

Решение. Передаточная функция замкнутой системы равна [2]

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + mW(p)} = \frac{K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 + mK}. \quad (1)$$

Условие отсутствия статической ошибки. $\Phi(0) = 1$ или $K = 1 + mK$, откуда

$$m = \frac{K - 1}{K} = 1 - \frac{1}{K}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы приобретает вид

$$\Phi(p) = \frac{K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K}, \quad (2)$$

а эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы с единичной обратной связью равна

$$W_0(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)} = \frac{K}{(T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2} = \frac{K_\Omega}{p(1 + T_3 p)},$$

где добротность по скорости

$$K_\Omega = \frac{K}{T_1 + T_2}$$

и эквивалентная постоянная времени

$$T_3 = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}.$$

215. Для предыдущей задачи определить первые два коэффициента ошибки в двух случаях:

1) общий коэффициент усиления прямой цепи стабилен ($K = \text{const}$);

2) общий коэффициент усиления прямой цепи нестабилен ($K \neq \text{const}$).

Решение. В случае $K = \text{const}$ имеем из (2) передаточную функцию по ошибке:

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K}.$$

Разлагая ее в ряд делением числителя на знаменатель (см. задачу 209), находим коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 = \frac{T_1 + T_2}{K}.$$

В случае $K \neq \text{const}$ примем $K_i = K_0 + \Delta K$ (будем полагать, что $\frac{\Delta K}{K_0} < 1$, а коэффициент передачи цепи обратной связи $m = 1 - \frac{1}{K_0}$). Передаточная функция замкнутой системы (1) в этом случае приобретает вид

$$\Phi(p) = \frac{K_0 + \Delta K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}}.$$

Передаточная функция по ошибке.

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p - \frac{\Delta K}{K_0}}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}}.$$

Разлагая ее в ряд, получаем

$$c_0 = - \frac{\Delta K}{K_0 \left(K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0} \right)} \approx - \frac{\Delta K}{K_0^2},$$

$$c_1 = \frac{(T_1 + T_2) \left(K_0 + \Delta K \right)}{\left(K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0} \right)^2} \approx \frac{T_1 + T_2}{K_0}.$$

216. Определить передаточную функцию неединичной обратной связи $\psi(p)$, при которой в статической системе регулирования устраняются статическая и скоростная ошибки. Структурная схема системы регулирования с неединичной обратной связью приведена на рис. 125, а. Передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Решение. Передаточная функция замкнутой системы с неединичной обратной связью в общем случае имеет вид

$$\frac{Y}{G} = \Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p) W(p)} = \frac{A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_1 p + A_0}{B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + \dots + B_1 p + B_0}.$$

Статическая ошибка обращается в нуль при

$$A_0 = B_0.$$

При выполнении дополнительного условия

$$A_1 = B_1$$

в системе устраняется скоростная ошибка.

В рассматриваемой задаче ликвидация статической и скоростной ошибок может быть достигнута при введении в цепь обратной связи фильтра с передаточной функцией

$$\psi(p) = \frac{k_{\text{ос}}}{1 + \tau_2 p}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$\frac{Y}{G} = \Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p) W(p)} = \frac{K(1 + \tau_2 p)}{T_1 T_2 \tau_2 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 \tau_2 + T_2 \tau_2) p^2 + (T_1 + T_2 + \tau_2) p + 1 + K k_{oc}}.$$

При

$$1 + K k_{oc} = K,$$

$$k_{oc} = \frac{K - 1}{K}$$

и

$$K \tau_2 = T_1 + T_2 + \tau_2,$$

$$\tau_2 = \frac{T_1 + T_2}{K - 1}.$$

система будет обладать астатизмом второго порядка. Статическая и скоростная ошибки обращаются при этом в нуль.

217. Для статической системы (рис. 125, а) с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

и передаточной функцией цепи обратной связи $\psi(p) = m$, выбранной так, чтобы получить астатизм первого порядка, определить два первых коэффициента ошибки, если $T_1 = 1$ сек, $T_2 = 0,02$ сек и $K = 1000 \pm 50$.

Решение. На основании формул, полученных в задаче 215, имеем

$$c_0 \approx -\frac{\Delta K}{K_0^2} = \mp \frac{50}{1000^2} = \mp 5 \cdot 10^{-5},$$

$$c_1 \approx \frac{T_1 + T_2}{K_0} = \frac{1 + 0,02}{1000} = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

218. В статической системе регулирования (рис. 126) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Определить коэффициент передачи n масштабирующего устройства в выходной или входной цепи, при котором система приобретает астатизм первого порядка относительно управляющего воздействия.

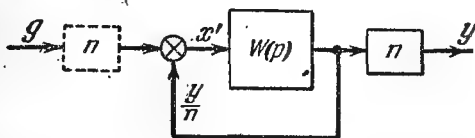


Рис. 126. Статическая система с масштабированием.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы с учетом масштабирующего устройства

$$\Phi(p) = \frac{nK}{T_0 T_1 T_2 p^3 + (T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K}.$$

Условие получения астатизма первого порядка

$$nK = 1 + K,$$

откуда имеем

$$n = \frac{1+K}{K}.$$

219. Для предыдущей задачи определить передаточную функцию разомкнутой эквивалентной системы без масштабирующего устройства.

Ответ.

$$W_0(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)} = \frac{K_0}{p(1 + ap + bp^2)},$$

где эквивалентная добротность по скорости

$$K_0 = \frac{K}{T_0 + T_1 + T_2} \text{ [сек}^{-1}\text{]},$$

коэффициенты

$$a = \frac{T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2}{T_0 + T_1 + T_2},$$

$$b = \frac{T_0 T_1 T_2}{T_0 + T_1 + T_2}.$$

220. Для системы комбинированного управления (рис. 127) определить условия получения астатизма третьего порядка и коэффициент ошибки c_3 . На рис. 127 обозначено: ЧЭ — чувствительный элемент, состоящий из

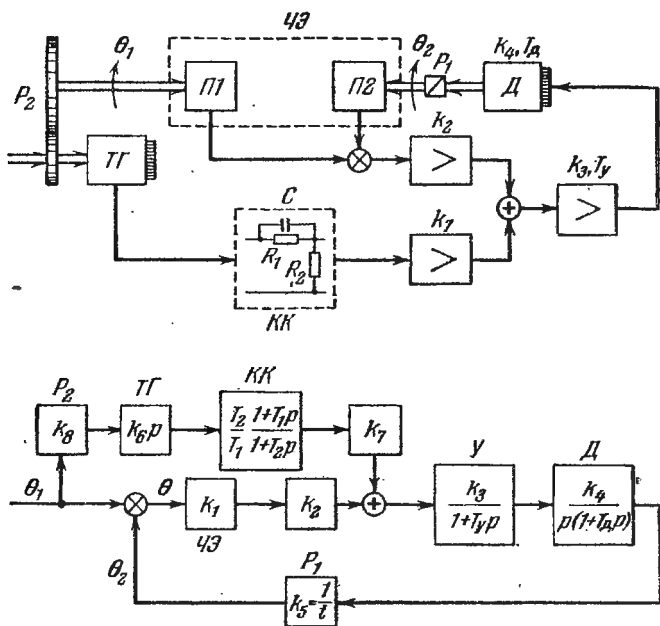


Рис. 127. Система комбинированного управления.

двух потенциометров П1 и П2 задающей и принимающей осей, Д — исполнительный двигатель, P_1 и P_2 — редукторы, ТГ — тахогенератор, КК — корректирующий контур, θ_1 — угол поворота задающей оси, θ_2 — угол поворота принимающей исполнительной оси, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ — рассогласование. Исходные данные: $k_1 = 1 \text{ в/град} = 57,3 \text{ в/рад}$ — крутизна чувствительного элемента; $k_2 = 25$ — коэффициент усиления по напряжению предварительного усилителя основной цепи; $k_3 = 4$ — коэффициент усиления по напряжению оконечного усилителя; $k_4 = 27,3 \text{ об/в мин} = 2,86 \text{ рад/в сек}$ — коэффициент передачи исполнитель-

ного двигателя; $k_5 = \frac{1}{i_1} = \frac{1}{1000}$ — коэффициент передачи редуктора P_1 ; $k_6 = 0,055$ в мин/об = 0,525 в сек/рад — коэффициент передачи тахогенератора; k_7 — коэффициент усиления по напряжению предварительного усилителя в цепи коррекции, $k_8 = i_2 = 500$ — коэффициент передачи редуктора P_2 ; $T_y = 0,005$ сек — постоянная времени усилителя; $T_d = 0,1$ сек — постоянная времени исполнительного двигателя; $T_1 = R_1 C$ и $T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$ — постоянные времени пассивного дифференцирующего контура. Искомыми параметрами являются k_7 , T_1 и T_2 .

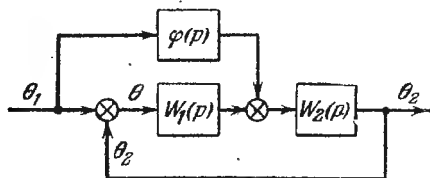


Рис. 128. Преобразованная структурная схема системы комбинированного управления.

Решение. Преобразованная структурная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 128. Передаточные функции частей основной цепи:

$$W_1(p) = k_1 k_2,$$

$$W_2(p) = \frac{k_3 k_4 k_5}{p(1 + T_y p)(1 + T_d p)}.$$

Передаточная функция цепи коррекции:

$$\varphi(p) = k_6 k_7 k_8 p \frac{T_2(1 + T_1 p)}{T_1(1 + T_2 p)}. \quad (1)$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)} = \frac{W(p) + \varphi(p) W_2(p)}{1 + W(p)}, \quad (2)$$

где передаточная функция исходной разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + T_d p)}. \quad (3)$$

Общий коэффициент усиления:

$$K = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = \frac{57,3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2,86}{1000} = 16,4 \text{ сек}^{-1}.$$

Передаточная функция относительно ошибки равна

$$\Phi_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_1(p)} = 1 - \Phi(p) = \frac{1 - \Phi(p) W_2(p)}{1 + W(p)}. \quad (4)$$

Подстановка (1) и (3) дает

$$\Phi_\theta(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p}{(1 + T_2 p) [T_y T_d p^3 + (T_y + T_d) p^2 + p + K]}, \quad (5)$$

где

$$b_0 = T_2 T_y T_d,$$

$$b_1 = T_y T_d + T_y T_2 + T_d T_2,$$

$$b_2 = T_y + T_d + T_2 - k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 T_2,$$

$$b_3 = 1 - k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 \frac{T_2}{T_1}.$$

Условия получения астатизма третьего порядка

$$b_3 = 0 \quad \text{и} \quad b_2 = 0.$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$k_7 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1}{k_3 k_4 k_5 k_6 k_8}, \quad (6)$$

$$T_2 (k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 - 1) = T_y + T_d. \quad (7)$$

В два уравнения (6) и (7) входят три неизвестные: k_7 , T_1 и T_2 . Третье, недостающее уравнение может быть получено на основании требований, накладываемых на величину последующих коэффициентов ошибки после c_0 , c_1 и c_2 , которые равны нулю, так как система имеет астатизм третьего порядка. Если никаких ограничений на последующие коэффициенты ошибки не накладывается, то расчет можно сделать на основании следующих соображений.

Для дифференцирующих пассивных контуров отношение постоянных времени $\frac{T_2}{T_1}$ обычно равно приблизительно 10. Положив в уравнении (6) $\frac{T_1}{T_2} = 10$, получаем

требуемое значение коэффициента усиления усилителя в цепи коррекции

$$k_7 = \frac{T_1}{T_2 \cdot k_3 k_4 k_5 k_6 k_8} = \frac{10 \cdot 1000}{4 \cdot 2,86 \cdot 0,525 \cdot 500} = 3,34.$$

Из (7) находим требуемое значение постоянной времени:

$$T_2 = \frac{T_y + T_d}{k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 - 1} = \frac{0,005 + 0,1}{4 \cdot 2,86 \cdot 0,5 \cdot 0,525 \cdot 3,34 - 1} = \frac{0,105}{10 - 1} = 0,0117 \text{ сек.}$$

Кроме того, находим

$$T_1 = 10T_2 = 0,117 \text{ сек.}$$

При выполнении условий (6) и (7) передаточная функция по ошибке (5) приобретает вид

$$\Phi_0(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3}{(1 + T_2 p) [T_y T_d p^3 + (T_y + T_d) \cdot p^2 + p + K]}. \quad (8)$$

Делением числителя на знаменатель (8) находим коэффициент ошибки по третьей производной управляющего воздействия:

$$\frac{c_3}{3!} = \frac{b_1}{K} = \frac{T_y T_d + T_y T_2 + T_d \cdot T_2}{K}. \quad (9)$$

Подстановка численных значений дает

$$\frac{c_3}{6} = \frac{0,005 \cdot 0,1 + 0,005 \cdot 0,0117 + 0,1 \cdot 0,0117}{16,4} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^3.$$

Уравнение (9) является тем недостающим уравнением, которое может быть использовано для совместного решения с уравнениями (6) и (7).

221. В системе регулирования (рис. 129) для повышения порядка астатизма введены два изодромных устройства, ИМ1 и ИМ2. Определить первые пять коэффициентов ошибки.

Ответ.

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_1 T_2}{K}, \quad \frac{c_4}{24} = \frac{T_1 T_2 (T_1 + T_2)}{K}.$$

222. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Значения параметров $K = 20 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,02 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,03 \text{ сек}$. На вход системы поступает гармоническое воздействие с амплитудой $\theta_{1\max} = 10^\circ$ и периодом $T_k = 7 \text{ сек}$. Определить амплитуду ошибки.

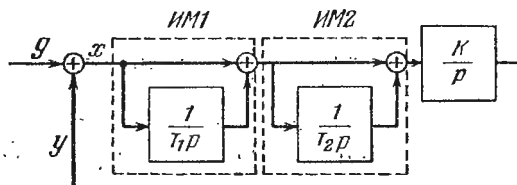


Рис. 129. Система с изодромыми устройствами.

Решение. 1) Для точного решения найдем передаточную функцию относительно ошибки

$$\Phi_\theta(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)+K}.$$

После приведения подобных членов и подстановки значений параметров имеем

$$\Phi_\theta(p) = \frac{6 \cdot 10^{-4} p^3 + 5 \cdot 10^{-2} p^2 + p}{6 \cdot 10^{-4} p^3 + 5 \cdot 10^{-2} p^2 + p + 20}.$$

Амплитуда ошибки:

$$\theta_{\max} = |\Phi_0(j\omega)| \theta_{1\max}.$$

Находим модуль частотной передаточной функции относительно ошибки при $\omega = \omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = 0,9 \text{ сек}^{-1}$.

$$\begin{aligned} |\Phi_\theta(j\omega_k)| &= \left| \frac{6 \cdot 10^{-4} (j\omega_k)^3 + 5 \cdot 10^{-2} (j\omega_k)^2 + j\omega_k}{6 \cdot 10^{-4} (j\omega_k)^3 + 5 \cdot 10^{-2} (j\omega_k)^2 + j\omega_k + 20} \right| = \\ &= \left| \frac{-0,004 + j0,9}{20 + j0,9} \right| = \sqrt{\frac{0,004^2 + 0,9^2}{20^2 + 0,9^2}} = 0,045. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\theta_{\max} = 0,045 \cdot 10 = 0^\circ,45 = 27'.$$

2) Для приближенного решения находим модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы при $\omega = \omega_k$:

$$A(\omega_k) = |W(j\omega_k)| = \frac{20}{0,9 \sqrt{1 + 0,9^2 \cdot 0,02^2} \sqrt{1 + 0,9^2 \cdot 0,03^2}} = 22,2.$$

Амплитуда ошибки:

$$\theta_{\max} = \frac{\theta_{1 \max}}{A(\omega_k)} = \frac{10}{22,2} = 0^\circ,45 = 27'.$$

223. Для следящей системы дана л. а. х. разомкнутой системы (рис. 130). Определить амплитуду ошибки,

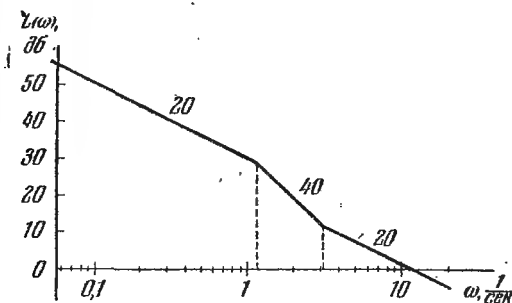


Рис. 130. Л. а. х. следящей системы.

если входное воздействие изменяется по закону $\theta_1 = \theta_{1 \max} \sin \omega_k t$, где $\theta_{1 \max} = 15^\circ$, а $\omega_k = 0,2 \text{ сек}^{-1}$.

Решение. По л. а. х., изображенной на рис. 130, определяем значение модуля в децибелах при частоте $\omega = \omega_k = 0,2 \text{ сек}^{-1}$.

$$L(\omega_k) = 20 \lg A(\omega_k) = 45 \text{ дБ}.$$

Далее находим $\lg A(\omega_k) = 2,25$. По логарифму определяем модуль:

$$A(\omega_k) = 10^{2,25} = 168.$$

Амплитуда ошибки:

$$\theta_{\max} = \frac{\theta_{1\max}}{A(\omega_k)} = \frac{15}{168} = 0,089 = 5',3.$$

224. Решить предыдущую задачу, если:

- 1) $\theta_{1\max} = 5^\circ, \quad \omega_k = 0,1 \text{ 1/сек};$
- 2) $\theta_{1\max} = 10^\circ, \quad \omega_k = 0,8 \text{ 1/сек};$
- 3) $\theta_{1\max} = 30^\circ, \quad \omega_k = 0,4 \text{ 1/сек};$

Ответ: 1) $0',88$; 2) $14',2$; 3) $21',2$.

225. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)},$$

где $K = 200 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,1 \text{ сек}$ и $T_3 = 0,01 \text{ сек}$. Определить фазовую ошибку при воспроизведении гармонического входного сигнала с амплитудой $\theta_{1\max} = 20^\circ$ и периодом $T_k = 1 \text{ сек}$.

Решение. 1) Для точного решения находим частотную передаточную функцию замкнутой системы при $\omega = \omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = 6,28 \text{ 1/сек}$.

$$\begin{aligned} \Phi(j\omega_k) &= \frac{W(j\omega_k)}{1 + W(j\omega_k)} = \frac{K(1 + j\omega_k T_2)}{j\omega_k(1 + j\omega_k T_1)(1 + j\omega_k T_3) + K(1 + j\omega_k T_2)} = \\ &= \frac{K(1 + j\omega_k T_2)}{K - \omega_k^2(T_1 + T_3) + j[\omega_k(1 + K T_2) - \omega_k^3 T_1 T_3]}. \end{aligned}$$

Подстановка численных значений параметров дает

$$\Phi(j\omega_k) = \frac{200 + j135}{180 + j130} = 1,09 - j0,0325,$$

откуда

$$\varphi = -\arctg \frac{0,0325}{1,09} = -\arctg 0,03 \approx -1^\circ,7.$$

2) Для приближенного решения примем, что в районе частоты входного воздействия частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)}.$$

При значении $\omega = \omega_k$ передаточная функция относительно ошибки может быть принята равной

$$\Phi_\theta(j\omega_k) \approx \frac{1}{W(j\omega_k)} = \frac{j\omega_k(1 + j\omega_k T_1)}{K},$$

откуда

$$\varphi \approx -\operatorname{Im} \frac{1}{W(j\omega_k)} = -\frac{\omega_k}{K} = -\frac{6,28}{200} = -0,0314 \text{ рад} = -1^\circ,8.$$

226. Определить фазовую ошибку для предыдущей задачи, если:

$$1) T_k = 10 \text{ сек}; \quad 2) T_k = 2 \text{ сек.}$$

$$\text{Ответ. } 1) -0^\circ,18; \quad 2) -0^\circ,9.$$

§ 5.2. Определение точности при наличии возмущающего воздействия

227. Для следящей системы, изображенной на рис. 24 (задачи 41 и 42), определить установившееся значение моментной ошибки, если момент нагрузки на исполнительной оси составляет $M = 200 \text{ Г} \cdot \text{см}$, а к. п. д. редуктора равен 0,8.

Решение. Добротность по моменту рассматриваемой следящей системы (см. задачу 42) составляет $K_M = 1700 \frac{\text{Г} \cdot \text{см}}{\text{угл. мин.}}$.

Отсюда находим моментную ошибку:

$$\theta_M = \frac{M_H}{K_M} = \frac{M}{\eta K_M} = \frac{2000}{0,8 \cdot 1700} = 1',47.$$

228. Решить предыдущую задачу, если задан момент нагрузки на оси двигателя $M_{нд} = 5 \text{ Г} \cdot \text{см}$.

Решение. Определяем добротность по моменту, отнесенную к оси двигателя:

$$K_{мд} = \frac{K_M}{i} = \frac{1700}{1000} = 1,7 \frac{\text{Г} \cdot \text{см}}{\text{угл. мин.}},$$

где $i = 1000$ — передаточное отношение редуктора. Моментная ошибка:

$$\theta_M = \frac{M_{нд}}{K_{мд}} = \frac{5}{1,7} = 2',95.$$

229. Определить моментные ошибки для следящих систем с астатизмом первого порядка при следующих исходных данных.

1) Добротность по скорости $K_\Omega = 200 \text{ сек}^{-1}$, передаточное отношение редуктора $i = 500$, скорость холостого хода двигателя $n_{\text{хх}} = 6000 \text{ об/мин}$, пусковой момент $M_{\text{п}} = 100 \text{ Г} \cdot \text{см}$, момент нагрузки, приведенный к оси двигателя, $M_{\text{нл}} = 30 \text{ Г} \cdot \text{см}$.

2) $K_\Omega = 500 \text{ сек}^{-1}$, $i = 10000$, $n_{\text{хх}} = 7500 \text{ об/мин}$, $M_{\text{п}} = 300 \text{ Г} \cdot \text{см}$, $M_{\text{нл}} = 150 \text{ Г} \cdot \text{см}$.

Ответ.

$$1) \theta_{\text{м}} = \frac{3440\pi n_{\text{хх}}}{30iK_\Omega} \frac{M_{\text{нл}}}{M_{\text{п}}} = \frac{3440 \cdot 3,14 \cdot 6000}{30 \cdot 500 \cdot 200} \frac{30}{100} = 6',5.$$

$$2) \theta_{\text{м}} = \frac{3440 \cdot 3,14 \cdot 7500}{30 \cdot 10000 \cdot 500} \cdot \frac{150}{300} = 0',27.$$

230. На рис. 131 изображена структурная схема системы регулирования. Значения параметров $k_1 = 10$,

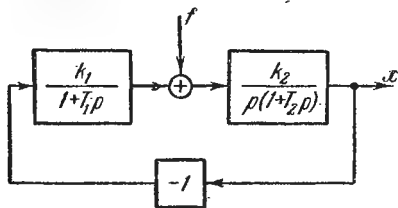


Рис. 131. Структурная схема к задаче 230.

$k_2 = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, и $T_2 = 1 \text{ сек}$. Возмущающее воздействие меняется по закону $f = f_{\text{max}} \sin \omega_k t$, где $f_{\text{max}} = 15$ и $\omega_k = 5 \text{ сек}^{-1}$. Определить амплитуду ошибки x_{max} .

Решение. Передаточная функция по возмущающему воздействию в замкнутой системе равна

$$\begin{aligned} \Phi_f(p) &= \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} = \frac{\frac{k_2}{p(1 + T_2 p)}}{1 + \frac{k_1 k_2}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}} = \\ &= \frac{k_2(1 + T_1 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Амплитуда ошибки:

$$x_{\max} = |\Phi_f(j\omega_k)| f_{\max} =$$

$$= \frac{k_2 f_{\max} \sqrt{1 + \omega_k^2 T_1^2}}{\sqrt{[k_1 k_2 - \omega_k^2 (T_1 + T_2)]^2 + \omega_k^2 (1 - \omega_k^2 T_1 T_2)^2}}.$$

Подстановка числовых значений дает

$$x_{\max} = \frac{2 \cdot 15 \sqrt{1 + 5^2 \cdot 0,1^2}}{\sqrt{[10 \cdot 2 - 5^2 (0,1 + 1)]^2 + 5^2 (1 - 5^2 \cdot 0,11)^2}} = 2,65.$$

231. Внешняя характеристика генератора (зависимость напряжения на его зажимах от тока нагрузки) изображена на рис. 132. Наклон характеристики составляет $\beta = 0,1$ в/а. Генератор имеет статическую систему стабилизации напряжения с общим коэффициентом усиления по разомкнутой цепи $K = 200$. Определить установившуюся ошибку при скачке нагрузки $\Delta I_H = 100$ а.

Решение.

$$\Delta U =$$

$$= \frac{\beta \Delta I_H}{1 + K} = \frac{0,1 \cdot 100}{1 + 200} \approx 0,05 \text{ в.}$$

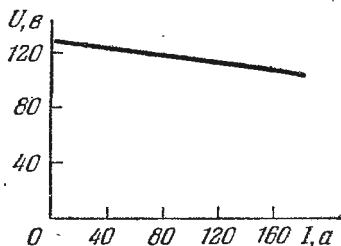


Рис. 132. Внешняя характеристика генератора.

232. В системе стабилизации температуры печи в качестве чувствительного элемента используется термомпара. При отключенной системе регулирования внешнее возмущение вызывает отклонение температуры от заданного значения $\Delta \tau_0 = 200^\circ \text{С}$. Определить установившееся отклонение температуры, если используется система регулирования с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где $K = 500$.

Решение.

$$\Delta \tau = \frac{\Delta \tau_0}{1 + K} = \frac{200}{1 + 500} \approx 0,4^\circ \text{С}.$$

§ 5.3. Корневые методы оценки динамических свойств

233. Даны характеристические уравнения систем регулирования:

$$1) p^3 + 14p^2 + 53p + 130 = 0,$$

$$2) p^3 + 11p^2 + 51p + 41 = 0,$$

$$3) p^3 + 2,5p^2 + 27p + 13 = 0,$$

$$4) p^4 + 7p^3 + 418p^2 + 1220p + 808 = 0,$$

$$5) p^4 + 3p^3 + 5,5p^2 + 6p + 2,5 = 0.$$

Определить корни уравнения, степень устойчивости h , колебательность μ и затухание η системы.

Указание. При вычислении корней целесообразно воспользоваться методикой, изложенной в книге [23].

Ответ.

$$1) p_1 = -10 \text{ сек}^{-1}, \quad p_{2,3} = (-2 \pm j3) \text{ сек}^{-1},$$

$$h = 2 \text{ сек}^{-1}, \quad \mu = \frac{3}{2} = 1,5, \quad \eta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} = 98,50\%;$$

$$2) p_1 = -1 \text{ сек}^{-1}, \quad p_{2,3} = (-5 \pm j4) \text{ сек}^{-1},$$

$$h = 1 \text{ сек}^{-1}, \quad \mu = 0,8, \quad \eta = 99,96\%;$$

$$3) p_1 = -0,5 \text{ сек}^{-1}, \quad p_{2,3} = (-1 \pm j5) \text{ сек}^{-1},$$

$$h = 0,5 \text{ сек}^{-1}, \quad \mu = 5, \quad \eta = 71,5\%;$$

$$4) p_1 = -1 \text{ сек}^{-1}, \quad p_2 = -2 \text{ сек}^{-1}, \quad p_{3,4} = (-2 \pm j20) \text{ сек}^{-1},$$

$$h = 1 \text{ сек}^{-1}, \quad \mu = 10, \quad \eta = 47\%;$$

$$5) p_1 = -1 \text{ сек}^{-1}, \quad p_2 = -1 \text{ сек}^{-1}, \quad p_{3,4} = (-0,5 \pm j1,5) \text{ сек}^{-1},$$

$$h = 0,5 \text{ сек}^{-1}, \quad \mu = 3, \quad \eta = 88\%.$$

234. Даны характеристические уравнения систем регулирования:

$$\left. \begin{array}{l} 1) p^3 + 4p^2 + 41p + 64 = 0, \\ 2) p^3 + 14p^2 + 144p + 1000 = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Пользуясь диаграммой Вышнеградского, определить без отыскания корней затухание и степень устойчивости.

Решение. 1) Используем подстановку $p = \sqrt[3]{64} q = 4q$. Тогда уравнение (1) после деления на 64 приобретает вид

$$q^3 + q^2 + \frac{41}{16}q + 1 = 0.$$

Параметры Вышнеградского $A = 1$ и $B = \frac{41}{16} = 2,56$. По диаграмме Вышнеградского с нанесенными линиями равного затухания (приложение 7) находим $\eta = 70\%$. По диаграмме Вышнеградского с нанесенными линиями равной степени устойчивости (приложение 8) находим относительную степень устойчивости $h_0 = 0,25$. Далее определяем абсолютное значение степени устойчивости $h = 4h_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$.

2) $\eta = 75\%$, $h = 2 \text{ сек}^{-1}$.

235. Дана передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+Tp)}. \quad (1)$$

Определить соотношение между добротностью по скорости K_Ω и постоянной времени T , при котором затухание за один период будет не меньше заданного значения η .

Решение. Находим характеристическое уравнение системы

$$1 + W(p) = 0$$

или, после подстановки (1),

$$p^2 + \frac{1}{T}p + \frac{K_\Omega}{T} = 0. \quad (2)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm j\sqrt{\frac{K_\Omega}{T} - \frac{1}{4T^2}} = -\alpha \pm j\beta, \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2T} \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt{\frac{K_\Omega}{T} - \frac{1}{4T^2}}.$$

Колебательность связана с затуханием за один период зависимостью

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\eta}}. \quad (4)$$

Далее находим

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{4K_{\Omega}T - 1}. \quad (5)$$

Совместное решение (4) и (5) дает искомое условие

$$K_{\Omega}T \leq \frac{\pi^2}{\left(\ln \frac{1}{1-\eta}\right)^2} + 0,25. \quad (6)$$

236. В системе с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+Tp)}$$

постоянная времени $T = 0,1$ сек. Определить допустимое значение добротности по скорости, соответствующее получению затухания за один период $\eta = 90\%$, $\eta = 95\%$, $\eta = 98\%$ и $\eta = 100\%$ (см. предыдущую задачу).

Ответ. $K_{\Omega} = 31,1$ сек⁻¹, $K_{\Omega} = 13,6$ сек⁻¹, $K_{\Omega} = 8,7$ сек⁻¹, $K_{\Omega} = 2,5$ сек⁻¹.

237. Передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом второго порядка имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e(1+Tp)}{p^2}. \quad (1)$$

Определить соотношение между добротностью по ускорению K_e и постоянной времени T , при котором затухание за один период будет не меньше заданного значения η .

Решение. Находим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$1 + W(p) = 0$$

или

$$p^2 + K_e T p + K_e = 0. \quad (2)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{K_e T}{2} \pm j \sqrt{K_e - \frac{K_e^2 T^2}{4}} = -\alpha \pm j\beta. \quad (3)$$

Колебательность

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{4}{T^2 K_e} - 1}. \quad (4)$$

Используя соотношение между колебательностью и затуханием

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\eta}}, \quad (5)$$

находим окончательно

$$\frac{1}{K_e T^2} \leq \frac{\pi^2}{\left(\ln \frac{1}{1-\eta}\right)^2} + 0,25, \quad (6)$$

или

$$K_e T^2 \geq \frac{1}{\frac{\pi^2}{\left(\ln \frac{1}{1-\eta}\right)^2} + 0,25}. \quad (7)$$

238. В системе с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_e (1 + Tp)}{p^2}$$

добротность по ускорению $K_e = 100 \text{ сек}^{-2}$. Определить минимальное значение постоянной времени T , соответствующее получению затухания за один период $\eta = 90\%$, $\eta = 95\%$, $\eta = 98\%$ и $\eta = 100\%$ (см. предыдущую задачу).
 Ответ. $T = 0,069 \text{ сек}$, $T = 0,086 \text{ сек}$, $T = 0,107 \text{ сек}$, $T = 0,20 \text{ сек}$.

239. В статической системе регулирования передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)}.$$

Постоянные времени равны $T_0 = 1 \text{ сек}$ и $T_1 = 0,5 \text{ сек}$. Определить допустимое значение общего коэффициента

усиления K , при котором затухание за один период будет не меньше $\eta = 90\%$.

Ответ.

$$K \leq \frac{(T_0 + T_1)^2}{T_0 T_1} \left[\frac{\pi^2}{\left(\ln \frac{1}{1-\eta} \right)^2} + 0,25 \right] - 1 =$$

$$= \frac{(1 + 0,5)^2}{1 \cdot 0,5} \left[\frac{3,14^2}{\left(\ln \frac{1}{1-0,9} \right)^2} + 0,25 \right] - 1 = 8,5.$$

§ 5.4. Оценка по кривой переходного процесса

240. Замкнутая система регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + 1) y = (a_1 p + 1) g. \quad (1)$$

Определить величину перерегулирования в предположении, что корни характеристического уравнения комплексные $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, для случая отсутствия задающего воздействия $g=0$. Начальные условия $y=y_0$ и $\dot{y}=0$ при $t=0$.

Ответ. Переходный процесс определяется выражением

$$y = y_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) =$$

$$= y_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \left(\beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right). \quad (2)$$

При исследовании на экстремум можно получить его первое значение

$$y_m = -y_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} \pi} = -y_0 e^{-\frac{\pi}{\mu}}. \quad (3)$$

Отсюда искомое перерегулирование:

$$\sigma = \frac{|y_m|}{y_0} = e^{-\frac{\alpha}{\beta} \pi} = \exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{4 \frac{a_0}{a_1^2} - 1}} \right]. \quad (4)$$

241. Для предыдущей задачи определить условие отсутствия перерегулирования.

Ответ. $\beta=0$, что соответствует выполнению условия $a_0 \leq 0,25 a_1^2$.

242. Для задачи 240 определить соотношение коэффициентов, при котором перерегулирование будет $\sigma = 10\%$, $\sigma = 20\%$, $\sigma = 50\%$.

Ответ. $a_0 = 0,72a_1^2$; $a_0 = 1,22a_1^2$; $a_0 = 5,25a_1^2$.

243. Для системы регулирования, дифференциальное уравнение (1) которой приведено в задаче 240, определить перерегулирование при подаче на вход ступенчатой функции $g_0 1(t)$, если до приложения входного воздействия система находилась в покое.

Ответ. Переходный процесс определяется выражением

$$y = g_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right].$$

Исследование его на максимум дает

$$y_m = g_0 \left[1 + e^{-\frac{1}{\mu} \arctg \frac{2\mu}{1-\mu^2}} \right].$$

Отсюда определяется перерегулирование

$$\sigma = \frac{y_m - g_0}{g_0} = \exp \left[- \frac{\arctg \frac{2\mu}{1-\mu^2}}{\mu} \right],$$

где

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{4 \frac{a_0}{a_1^2} - 1}.$$

244. Для соотношения коэффициентов a_0 и a_1 , соответствующих получению перерегулирования $\sigma = 0\%$, $\sigma = 10\%$, $\sigma = 20\%$ и $\sigma = 50\%$, при согласовании из неподвижного положения (см. задачи 241 и 242), определить величину перерегулирования при подаче на вход ступенчатого воздействия $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ и произвести сравнение величин перерегулирования.

Ответ. Значения перерегулирований сведены в таблицу:

Вид движения	$a_0 = 0,25 a_1^2$	$a_0 = 0,72 a_1^2$	$a_0 = 1,22 a_1^2$	$a_0 = 5,25 a_1^2$
Согласование из неподвижного положения	0%	10%	20%	50%
Отработка единичного ступенчатого воздействия	13,5%	25%	32%	55%

245. Передаточная функция замкнутой системы регулирования имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{a_1 p + 1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}.$$

На вход системы поступает воздействие типа единичной ступенчатой функции $1(t)$. Посредством построения переходного процесса определить перерегулирование и время переходного процесса при следующих значениях коэффициентов:

1) $a_1 = 0,33 \text{ сек}$, $a_2 = 0,01 \text{ сек}^2$, $a_3 = 1,58 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^3$,

2) $a_1 = 0,415 \text{ сек}$, $a_2 = 0,04 \text{ сек}^2$, $a_3 = 0,002 \text{ сек}^3$;

3) $a_1 = 0,087 \text{ сек}$, $a_2 = 0,0025 \text{ сек}^2$, $a_3 = 0,435 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^3$.

Ответ.

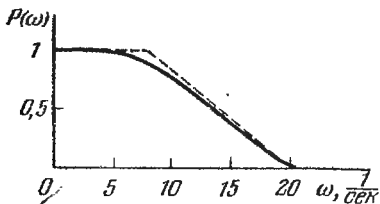
1) $\sigma = 13,8\%$ $t_n = 0,775 \text{ сек}$;

2) $\sigma = 26,5\%$, $t_n = 1,17 \text{ сек}$;

3) $\sigma = 37,2\%$, $t_n = 0,27 \text{ сек}$.

246. На рис. 133 изображена вещественная частотная характеристика замкнутой системы. Определить ориентировочные значения перерегулирования и времени переходного процесса.

Решение. Интервал существенных частот для вещественной характеристики $\omega_c = 20 \text{ сек}^{-1}$. Это дает время переходного процесса



$$\frac{\pi}{\omega_c} < t_n < \frac{4\pi}{\omega_c},$$

или

$$0,157 \text{ сек} < t_n < 0,628 \text{ сек}.$$

Перерегулирование $\sigma < 18\%$.

Для более точного расчета необходимо обратиться к кривым, данным в приложении 12. Коэффициент наклона вещественной характеристики (см. рис. 133) составляет $\kappa = 0,4$. Это дает $\sigma = 10\%$ и $t_n = \frac{7}{20} = 0,35 \text{ сек}$.

Рис. 133. Вещественная частотная характеристика.

247. Определить перерегулирование и время переходного процесса для вещественной частотной характеристики, изображенной на рис. 134.

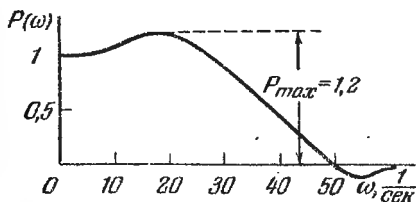


Рис. 134. Вещественная характеристика.

Решение. Высокочастотную часть характеристики, соответствующую $P(\omega) < 0$, можно отбросить, так как $P_{\min} < 0,2$. Тогда перерегулирование в системе равно

$$\sigma < \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)} = \frac{1,18 \cdot 1,2 - 1}{1} = 0,41 = 41\%.$$

Время переходного процесса

$$t_n > \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{3,14}{50} = 0,0628 \text{ сек.}$$

Для более точного расчета необходимо обратиться к кривым приложения 13. В результате их использования определяем

$$\sigma = 23\% \quad \text{и} \quad t_n = \frac{3\pi}{\omega_c} = \frac{3 \cdot 3,14}{50} = 0,18 \text{ сек.}$$

§ 5.5. Интегральные оценки

248. Передаточная функция разомкнутой следящей системы с астатизмом первого порядка имеет вид

$$W(p) = \frac{K_Q}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

При значениях постоянных времени $T_1 = 0,02 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,04 \text{ сек}$ определить значение добротности по скорости, соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки при обработке ступенчатого воздействия $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$

Решение. Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3}.$$

Изображение по Лапласу выходной величины имеет вид

$$X(p) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3} \frac{1}{p} = \\ = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3} \frac{1}{p}.$$

В соответствии с приложением 16 находим значение интегральной оценки

$$I = \frac{B_0 \Delta_0}{2a_0^2 \Delta} g_0,$$

где $B_0 = b_0^2 = K_{\Omega}^2$, $a_0 = K_{\Omega}$. Значения определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0(a_1 a_2 - a_0 a_3),$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1^2 a_2 - a_1 a_0 a_3 + a_0 a_2^2.$$

В результате имеем

$$I = \left[\frac{1}{2K_{\Omega}} + \frac{1}{2} \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 + T_2 - K_{\Omega} T_1 T_2} \right] g_0.$$

Для получения минимального значения интегральной оценки приравняем нулю производную

$$\frac{dI}{dK_{\Omega}} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{K_{\Omega}^2} + \frac{T_1 T_2 (T_1 + T_2)^2}{(T_1 + T_2 - K_{\Omega} T_1 T_2)^2} \right] = 0,$$

откуда оптимальное значение добротности

$$K_{\Omega} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 + (T_1 + T_2) \sqrt{T_1 T_2}}.$$

Подстановка численных значений постоянных времени дает

$$K_{\Omega} = \frac{0,06}{8 \cdot 10^{-4} + 6\sqrt{8 \cdot 10^{-4}}} = 24 \text{ сек}^{-1}.$$

249. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega} + K_1 p}{p(1 + Tp)}.$$

При фиксированных значениях $T = 0,1 \text{ сек}$ и добротности по скорости $K_{\Omega} = 20 \text{ сек}^{-1}$ определить значение коэффициента K_1 , определяющего уровень сигнала по первой производной, соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки при подаче на вход управляющего воздействия в виде единичной импульсной функции $g(t) = \delta(t)$.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K_{\Omega} + K_1 p}{K_{\Omega} + (1 + K_1)p + Tp^2}.$$

Изображение входного воздействия $G(p) = 1$. Изображение выходной величины

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{K_{\Omega} + K_1 p}{K_{\Omega} + (1 + K_1)p + Tp^2}.$$

Значение квадратичной интегральной оценки (см. приложение 16)

$$I = \frac{B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2}{2a_0^2 \Delta}.$$

Коэффициенты равны

$$B_1 = b_1^2 = K_{\Omega}^2, \quad B_2 = b_2^2 = K_1^2,$$

$$a_0 = K_{\Omega}, \quad a_1 = 1 + K_1 \quad \text{и} \quad a_2 = T.$$

Значения определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 a_1 a_2 = K_{\Omega} (1 + K_1) T,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0^2 a_2 = K_{\Omega}^2 T,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{vmatrix} = a_0^3 = K_{\Omega}^3.$$

Далее находим

$$I = \frac{K_{\Omega}^2 K_{\Omega}^2 T + K_1^2 K_{\Omega}^3}{2 K_{\Omega}^2 K_{\Omega} (1 + K_1) T} = \frac{K_{\Omega} T + K_1^2}{2 (1 + K_1) T}.$$

Для нахождения минимума I приравняем нулю производную $\frac{dI}{dK_1} = 0$. В результате имеем

$$K_1^2 + 2K_1 - K_{\Omega} T = 0,$$

откуда

$$K_1 = -1 + \sqrt{1 + K_{\Omega} T}.$$

Подстановка численных значений дает

$$K_1 = -1 + \sqrt{1 + 20 \cdot 0,1} = 0,73.$$

250. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1 + T p)}.$$

При фиксированном значении постоянной времени $T = 0,2$ сек определить оптимальное значение добротности по скорости, соответствующее минимуму интегральной оценки вида

$$I = \int_0^{\infty} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dx \quad (1)$$

при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия $g(t) = 1(t)$ для значений постоянной времени экстремали $\tau = 0$, $\tau = 0,1$ сек, $\tau = 0,5$ сек и $\tau = 1$ сек.

Решение. Разбиваем интеграл (1) на два интеграла

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\infty} x^2 dt + \tau^2 \int_0^{\infty} \dot{x}^2 dt.$$

Находим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + Tp^2}.$$

Изображение выходной величины при $G(p) = \frac{1}{p}$ равно

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + Tp^2} \frac{1}{p}.$$

В соответствии с приложением 16 находим

$$I_1 = \frac{B_0 \Delta_0}{2a_0^2 \Delta}. \quad (2)$$

Значения коэффициентов:

$$B_0 = b_0^2 = K_{\Omega}^2, \quad a_0 = K_{\Omega}, \quad a_1 = 1 \quad \text{и} \quad a_2 = T.$$

Значения определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 a_1 = K_{\Omega},$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + a_0 a_2 = 1 + K_{\Omega} T.$$

Подставляем найденные значения в (2); получим

$$I_1 = \frac{K_{\Omega}^2 (1 + K_{\Omega} T)}{2K_{\Omega}^2 K_{\Omega}} = \frac{1 + K_{\Omega} T}{2K_{\Omega}}.$$

Для нахождения I_2 определяем изображение скорости изменения выходной величины

$$pY(p) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + Tp^2}.$$

В соответствии с приложением 16 находим

$$I_2 = \tau^2 \frac{B_1 \Delta_1}{2a_0^2 \Delta}, \quad (3)$$

где $B_1 = b_1^2 = K_\Omega^2$, а определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 = K_\Omega^2.$$

Далее имеем

$$I_2 = \frac{K_\Omega \tau^2}{2}.$$

Результирующее значение интегральной оценки равно

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1 + K_\Omega T}{2K_\Omega} + \frac{K_\Omega \tau^2}{2}. \quad (4)$$

Для нахождения оптимального значения K_Ω приравняем нулю первую производную (4):

$$\frac{dI}{dK_\Omega} = 0.$$

После дифференцирования имеем

$$-\frac{1}{K_\Omega^2} + \tau^2 = 0,$$

откуда оптимальное значение добротности по скорости $K_\Omega = \frac{1}{\tau}$. Численные значения $K_\Omega \rightarrow \infty$, $K_\Omega = 10 \text{ сек}^{-1}$, $K_\Omega = 2 \text{ сек}^{-1}$ и $K_\Omega = 1 \text{ сек}^{-1}$.

§ 5.6. Частотные оценки динамических свойств

251. На рис. 135 изображена амплитудная частотная характеристика замкнутой системы. Определить показатель колебательности.

Ответ.

$$M = \frac{|\Phi(j\omega)|_{\max}}{|\Phi(0)|} = \frac{3,2}{2} = 1,6.$$

252. На рис. 136 изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой следящей системы. Она может быть построена по таблице

$\operatorname{Re} W(j\omega)$	-2	-1,75	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0
$\operatorname{Im} W(j\omega)$	-4,95	-1,8	-1,75	-1,6	-1,4	-1,05	-0,85	-0,65	-0,55

Определить показатель колебательности замкнутой системы.

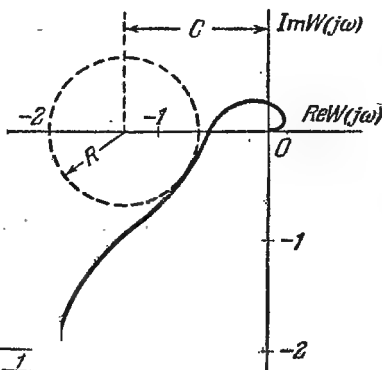
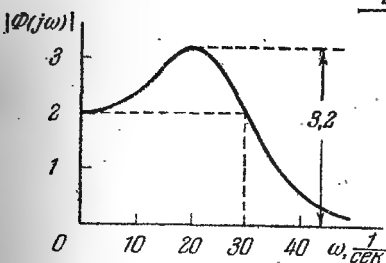


Рис. 135. А. ч. х. замкнутой системы.

Рис. 136. А. ф. х. разомкнутой системы.

Решение. Для нахождения показателя колебательности необходимо определить параметры окружности, которой касается амплитудно-фазовая характеристика. Параметры окружности связаны с показателем колебательности формулами

$$R = \frac{M}{M^2 - 1} \quad \text{и} \quad C = \frac{M^2}{M^2 - 1},$$

где R — радиус окружности, а C — сдвиг центра окружности влево от начала координат. В результате подбора определяем, что касающаяся окружность соответствует

$$M = 2, \quad R = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad C = \frac{4}{3}.$$

Построение сделано пунктиром на рис. 136.

253. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+Tp)}.$$

Определить соотношение между добротностью по скорости K_{Ω} и постоянной времени, при котором система будет иметь показатель колебательности не более заданного значения M .

Решение. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + Tp^2}.$$

Частотная передаточная функция замкнутой системы запишется в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + j\omega - \omega^2 T}.$$

Ее модуль равен

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{K_{\Omega}}{\sqrt{(K_{\Omega} - \omega^2 T)^2 + \omega^2}}.$$

Исследование на максимум этого выражения дает значение показателя колебательности

$$|\Phi(j\omega)|_{\max} = \frac{2K_{\Omega}T}{\sqrt{4K_{\Omega}T - 1}} = M \quad (\text{при } K_{\Omega}T \geq 0,5).$$

Из последнего выражения находим

$$K_{\Omega}T \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}.$$

254. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\varepsilon}(1 + \tau p)}{p^2},$$

где K_{ε} — добротность по ускорению, а τ — постоянная времени корректирующего контура.

Ответ.

$$K_{\varepsilon}\tau^2 \geq 2 \frac{M^2 - M\sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}.$$

255. На рис. 137 изображены логарифмические частотные амплитудная и фазовые характеристики (л. а. х. и л. ф. х.) разомкнутой системы. Определить показатель колебательности замкнутой системы.

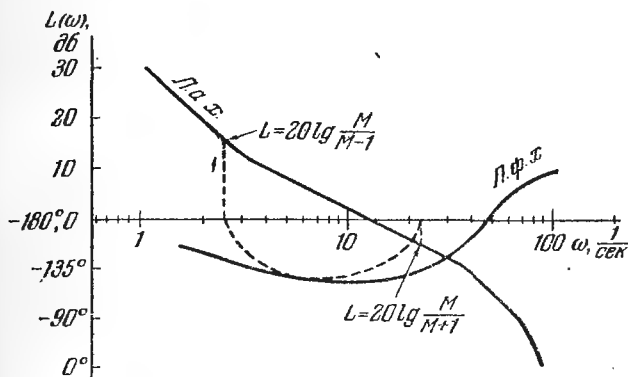


Рис. 137. Л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы.

Решение. Для нахождения показателя колебательности необходимо таким образом построить запретную зону для фазовой характеристики, чтобы фазовая характеристика касалась этой зоны. Построение запретной зоны делается в соответствии с приложением 14, где приведены необходимые запасы по фазе в функции модуля в децибелах для различных значений показателя колебательности. В результате подбора определяем, что показатель колебательности $M = 1, 2$. Построение запретной зоны показано пунктиром на рис. 137.

256. Построить л. а. х. и л. ф. х. и определить показатель колебательности, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$1) W(p) = \frac{100(1 + 0,173p)}{p^2(1 + 0,035p)};$$

$$2) W(p) = \frac{25(1 + 0,66p)}{p^2(1 + 0,03p)};$$

$$3) W(p) = \frac{400(1 + 0,1p)}{p(1 + p)(1 + 0,013p)};$$

$$4) W(p) = \frac{1000(1 + 0,05p)}{p(1 + 0,4p)(0,013p)}.$$

Ответ. 1) $M = 1,5$; 2) $M = 1,1$; 3) $M = 1,3$; 4) $M = 1,7$.

257. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{-K_{\Omega}}{p \prod_{i=1}^n (1 + T_i p)}.$$

Определить условие, при котором показатель колебательности замкнутой системы не будет превышать единицу, если число постоянных времени является произвольным, т. е. n — произвольное целое число.

Ответ.

$$K_{\Omega} \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{1}{2}.$$

258. Для амплитудной частотной характеристики замкнутой системы (см. рис. 135) определить полосу пропускания системы.

Ответ. $\omega_{\Pi} = 30 \text{ сек}^{-1}$, $f_{\Pi} = 4,8 \text{ гц}$.

259. Для л. а. х., изображенной на рис. 137, определить ориентировочное значение полосы пропускания.

Ответ. В первом приближении полосу пропускания замкнутой системы можно принять равной частоте среза л. а. х. разомкнутой системы. В результате имеем $\omega_{\Pi} \approx \omega_{\text{ср}} = 13 \text{ сек}^{-1}$ или $f_{\Pi} = 2,1 \text{ гц}$.

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 6.1. Выбор параметров САР по требуемой точности

260. Для системы стабилизации углового положения некоторого тела (рис. 138) выбрать такое значение коэффициента передачи по углу k_ψ , чтобы при внешнем

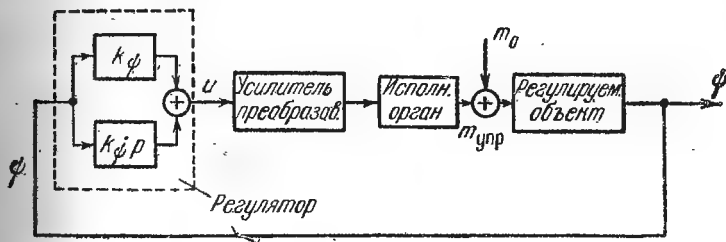


Рис. 138. Блок-схема системы стабилизации углового положения тела.

возмущающем моменте $M(t) = m_0$ отклонение угла ψ не превышало допустимое значение $\psi_{\text{доп}}$.

Уравнения отдельных звеньев системы имеют вид:

1. Уравнение регулируемого объекта

$$J \cdot \frac{d\dot{\psi}}{dt} = m_{\text{упр}} + m_0,$$

где J — момент инерции тела, ψ — угол поворота тела, $\dot{\psi}$ — его угловая скорость, $m_{\text{упр}}$ — управляющий момент со стороны исполнительного органа системы стабилизации, m_0 — внешний возмущающий момент.

2. Уравнение исполнительного органа совместно с усилителем-преобразователем

$$m_{\text{упр}} = k_{\text{н.о}} u,$$

где $k_{\text{н.о}}$ — коэффициент передачи исполнительного органа и усилителя-преобразователя.

3. Уравнение регулятора (принятый закон управления)

$$u = -(k_{\psi}\psi + k_{\dot{\psi}}\dot{\psi}).$$

Решение. Уравнение замкнутой системы стабилизации может быть записано в виде

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + k_{\text{н.о}} k_{\psi} \frac{d\psi}{dt} + k_{\text{н.о}} k_{\dot{\psi}} \psi = m_0,$$

откуда

$$\psi_{\text{доп}} \leq \frac{m_0}{k_{\text{н.о}} k_{\psi}} \quad \text{и} \quad k_{\psi} \geq \frac{m_0}{k_{\text{н.о}} \psi_{\text{доп}}}.$$

261. Определить требуемое значение общего коэффициента усиления K для системы регулирования температуры (рис. 139) из условия обеспечения нужной точности регулирования в установившемся режиме.

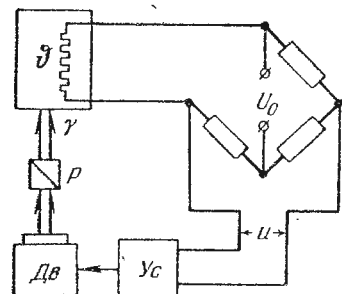


Рис. 139. Система регулирования температуры.

Отклонение регулируемой величины ϑ измеряется с помощью термометра сопротивления, включенного в мостовую схему. Напряжение u с диагонали моста поступает на балансный усилитель U_c , который управляет двигателем $Дв$. Через редуктор P двигатель приводит в движение регулирующий орган. Регулирующий орган воздействует на объект за счет изменения величины регулирующего воздействия γ .

Уравнения звеньев имеют вид.

1. Уравнение регулируемого объекта

$$(1 + T_1 p) \vartheta = -k_1 \gamma + k_0 f,$$

где T_1 [сек] — постоянная времени объекта, k_1 и k_0 — коэффициенты передачи, f — возмущающее воздействие.

2. Уравнение чувствительного элемента — моста с термометром сопротивления

$$u = k_2 \vartheta,$$

где k_2 [в/град] — коэффициент передачи.

3. Уравнение привода вместе с усилителем

$$(1 + T_2 p) p \dot{\vartheta} = k_3 u,$$

где T_2 [сек] — электромеханическая постоянная времени, k_3 [1/сек] — коэффициент передачи.

Решение. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы должен выбираться из условия

$$K = k_1 k_2 k_3 \geq \frac{k_c f}{\vartheta_{\text{доп}}},$$

где f — значение скорости возмущающего воздействия; $\vartheta_{\text{доп}}$ — допустимое значение ошибки в установившемся режиме.

262. Определить требуемое значение коэффициента усиления для тахометрического привода постоянной

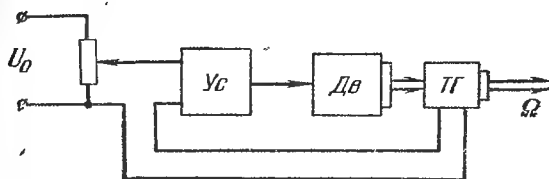


Рис. 140. Тахометрический привод постоянной скорости.

скорости (рис. 140). Допустимая ошибка скорости вращения при моменте нагрузки по валу двигателя $M_n = 0,2 M_{\text{из}}$ не должна превышать 0,1% от скорости холостого хода.

Решение. Ошибка регулирования $\Delta \Omega$ состоит из двух слагаемых

$$\Delta \Omega = \frac{1}{1 + W(p)} \Omega_3 \pm \frac{W_M(p)}{1 + W(p)} M_n, \quad (1)$$

где Ω_3 — заданная скорость вращения привода, $W(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы, $W_m(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы по моменту нагрузки. Первое слагаемое соответствует ошибке из-за выбранного закона регулирования, второе слагаемое определяет составляющую ошибки, вызванную действием момента нагрузки M_n .

Если учитывать постоянную времени усилителя T_y и электромеханическую постоянную времени двигателя T_m , то

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_m p)(1 + T_y p)}$$

и

$$W_m(p) = \frac{\frac{\Omega_0}{M_{кз}}}{(1 + T_m p)},$$

где $M_{кз}$ — момент короткого замыкания, развиваемый двигателем, Ω_0 — скорость холостого хода двигателя, K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы. Выражение для ошибки регулирования $\Delta\Omega$ принимает вид

$$\Delta\Omega = \frac{[T_m T_y p^2 + (T_m + T_y)p + 1] \Omega_3}{T_m T_y p^2 + (T_m + T_y)p + 1 + K} \pm \pm \frac{\frac{M_n}{M_{кз}} \Omega_0 (1 + T_y p)}{T_m T_y p^2 + (T_m + T_y)p + 1 + K}. \quad (2)$$

Обычно настройка системы осуществляется таким образом, чтобы ошибка регулирования была наименьшей. Этому условию соответствует такая настройка, при которой в статической системе устраняется статическая ошибка от закона регулирования. Для ликвидации статической ошибки коэффициент передачи главной обратной связи должен отличаться от единицы и быть равным

$$K_{ос} = \frac{K - 1}{K}, \quad (3)$$

т. е. в системе регулирования должна иметь место неединичная обратная связь.

Чтобы обеспечить требуемую точность поддержания скорости вращения при моменте нагрузки $M_H = 0,2M_{K3}$, коэффициент усиления разомкнутой системы K должен быть выбран из условия

$$\Delta\Omega = \frac{\frac{M_H}{M_{K3}} \Omega_0}{1 + K}, \quad (4)$$

откуда

$$K = \frac{\frac{M_H}{M_{K3}} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}}{\frac{\Delta\Omega}{\Omega}} = \frac{0,2 - 0,001}{0,001} = 199. \quad (5)$$

263. Определить местоположение л. а. х. разомкнутой следящей системы из условия, чтобы ошибка слежения не превышала $\vartheta_{\max} \leq 1',5$ при изменении входного воздействия по гармоническому закону

$$\vartheta_1 = \theta_{1 \max} \sin \omega_k t,$$

где $\theta_{1 \max} = 25^\circ$,

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = 6,28 \text{ 1/сек.}$$

Структурная схема следящей системы показана на рис. 141, а.

Решение. Ошибка слежения, вызванная изменением входного воздействия, равна

$$\vartheta_{\max} = \frac{1}{|1 + W(j\omega)|} \theta_{1 \max} \quad \text{при} \quad \omega = \omega_k, \quad (1)$$

где $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы. Так как обычно в современных следящих системах $|W(j\omega_k)| \gg 1$, то можно воспользоваться приближенной зависимостью

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{\theta_{1 \max}}{|W(j\omega_k)|}. \quad (2)$$

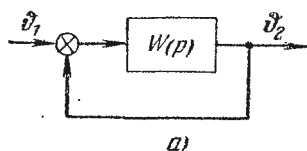
Разрешая выражение (2) относительно $|W(j\omega_k)|$, получим требуемое значение модуля частотной передаточной функции

$$|W(j\omega_k)| = \frac{\theta_{1 \max}}{\vartheta_{\max}}, \quad (3)$$

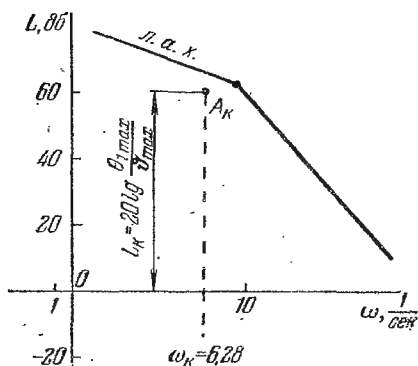
или

$$L_K = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (4)$$

По формуле (4) в логарифмической системе координат



а)



б)

Рис. 141. а) Структурная схема следящей системы; б) построение контрольной точки A_K .

(рис. 141, б) построена так называемая контрольная точка A_K :

$$\omega_K = 6,28 \text{ 1/сек}, \quad 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = 20 \lg \frac{25 \cdot 60}{1,5} = 60 \text{ дб}.$$

Требуемая точность слежения будет достигнута, если л. а. х. системы будет лежать выше точки A_K , в пределе пересекая ее (рис. 141, б.)

264. Определить запретную область для л. а. х. разомкнутой следящей системы из условия, чтобы ошибка слежения не превышала $\vartheta_{\max} \leq 1,0$ при изменении

входного воздействия с максимальной скоростью $\Omega = 40 \text{ град/сек}$ и максимальным ускорением $\varepsilon = 60 \text{ град/сек}^2$.

Решение. В тех случаях, когда закон изменения входного задающего воздействия неизвестен, расчет можно вести на эквивалентное синусоидальное воздействие [4].

Параметры эквивалентного режима определяются по формулам

$$\omega_k = \frac{\varepsilon}{\Omega} = 1,5 \text{ сек}^{-1},$$

$$\theta_{1 \max} = \frac{\Omega}{\omega_k} = \frac{\varepsilon}{\omega_k^2} = \frac{40}{1,5^2} = 26^\circ,7. \quad (1)$$

Здесь ω_k — угловая частота колебаний эквивалентного синусоидального воздействия, $\theta_{1 \max}$ — амплитуда колебаний эквивалентного синусоидального воздействия.

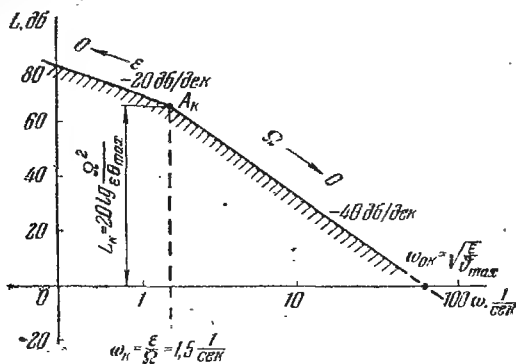


Рис. 142. Построение запретной области

Координаты контрольной точки A_k (см. предыдущую задачу) равны (рис. 142)

$$\omega_k = \frac{\varepsilon}{\Omega} = 1,5 \text{ сек}^{-1},$$

$$L_k = 20 \lg \frac{\theta_{1 \max}}{\theta_{\max}} = 20 \lg \frac{\Omega^2}{\varepsilon \theta_{\max}} = 20 \lg 1600 \approx 63 \text{ дБ}.$$

Для построения всей запретной области найдем геометрическое место контрольных точек A_{kl} , соответствующих

двум случаям: 1) когда Ω максимально, а ε убывает до нуля, 2) когда ε максимально, а Ω убывает до нуля. В первом случае геометрическим местом точек будет являться прямая, проходящая с наклоном -40 дб/дек через точку A_K . Во втором случае — прямая с наклоном -20 дб/дек (см. рис. 142).

Для обеспечения требуемой точности слежения л. а. х. разомкнутой следящей системы не должна заходить в запретную зону, ограниченную этими прямыми.

265. Для следящей системы, структурная схема которой показана на рис. 141, а, построить низкочастотную

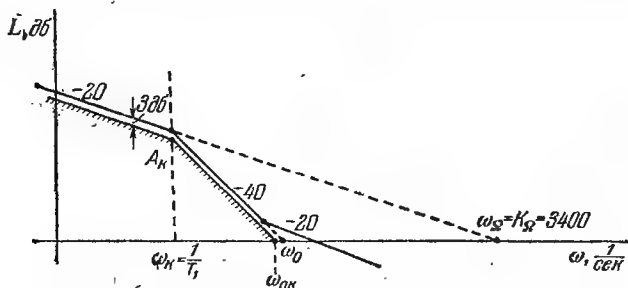


Рис. 143. Построение низкочастотной части желаемой л. а. х.

часть желаемой л. а. х. и определить требуемую величину общего коэффициента усиления из условия обеспечения необходимой точности слежения. Система обладает астатизмом первого порядка. Требования, предъявляемые к точности слежения, те же, что и в задаче 264.

Решение. Для облегчения задачи демпфирования системы л. а. х. должна располагаться как можно левее. Предельно допустимое смещение л. а. х. влево ограничивается запретной зоной по точности. С этой точки зрения целесообразно, чтобы низкочастотная ветвь желаемой л. а. х., имеющая наклон -40 дб/дек, проходила как можно ближе к линии запретной зоны (рис. 143), т. е. чтобы $\omega_0 = \omega_{0K}$ и $T_1 = 1/\omega_K$.

Однако первая асимптота л. а. х., имеющая наклон -20 дб/дек, должна проходить выше границы запретной области 3 дб (см. рис. 143).

Если эту асимптоту продлить до пересечения с нулевой осью, то точка пересечения ω_2 даст значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы (добротности по скорости K_Ω).

Согласно рис. 143 имеем

$$K_\Omega = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = 1,41 \frac{40 \cdot 600}{1} = 3400 \text{ сек}^{-1}.$$

Базовая частота

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{1,41 \frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}} = 1,19 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}} = \\ &= 1,19 \sqrt{60 \cdot 60} = 71,3 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

266. Определить требуемую величину общего коэффициента усиления разомкнутой следящей системы. Следящая система обладает астатизмом второго порядка. Остальные данные те же, что в задаче 143.

Ответ. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы добротность по ускорению $K_\varepsilon = 3600 \text{ сек}^{-2}$.

267. Для следящей системы, обладающей астатизмом первого порядка, определить параметры низкочастотной части желаемой л. а. х. из условия обеспечения требуемой точности слежения без учета и с учетом момента нагрузки. Максимальная скорость слежения $\Omega = 24 \text{ град/сек}$, максимальное ускорение $\varepsilon = 20 \text{ град/сек}^2$, допустимая величина ошибки $\vartheta_{\max} = 0^\circ,1$. Момент нагрузки, приведенный к валу двигателя, $M_n = 2 \text{ Гсм} = 19,6 \cdot 10^{-5} \text{ н} \cdot \text{м}$. Жесткость механической характеристики $\beta = \frac{\Omega_0}{M_0} = \frac{5000 \cdot 6}{57,3 \cdot 10} = 52,3 \text{ 1/Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$ (где $\Omega_0 = 5000 \text{ об/мин}$ — скорость холостого хода, $M_0 = 10 \text{ Гсм} = 9,81 \cdot 10^{-4} \text{ н} \cdot \text{м}$ — пусковой момент двигателя). Передаточное отношение редуктора $i = 1000$.

Решение. 1. Момент нагрузки отсутствует (см. задачу 265). Тогда

$$T_1 = \frac{1}{\omega_k} = \frac{\Omega}{\varepsilon} = 1,2 \text{ сек}, \quad (1)$$

$$K_\Omega = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = \frac{1,41 \cdot 24}{0,1} = 338 \text{ сек}^{-1}. \quad (2)$$

2. Двигатель нагружен моментом $M_n = 2$ Гсм. Демпфирование системы осуществляется по первому методу [4], т. е. введением обратных связей, охватывающих двигатель, или производных от угла рассогласования. Тогда

$$T_1 = \frac{1}{\omega_k} = \frac{\Omega}{\varepsilon} = 1,2 \text{ сек}, \quad (3)$$

$$K_\Omega = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} + \frac{\beta M_n}{\vartheta_{\max} i} = 338 + \frac{104,6 - 57,3}{0,1 \cdot 1000} = 338 + 60 = 398 \text{ сек}^{-1}, \quad (4)$$

где $\vartheta_{\max} i$ — ошибка, приведенная к валу двигателя.

3. Двигатель нагружен, $M_n = 2$ Гсм. Демпфирование системы осуществляется по второму методу [4], т. е. введением инерционности в усилительный канал. Тогда

$$T_1 \leq 0,236 \frac{\sqrt{(\vartheta_{\max} + \vartheta_m)^2}}{\vartheta_m \sqrt{\varepsilon}}, \quad (5)$$

где $\vartheta_m = \frac{\beta M_n}{K_\Omega i}$ — моментная ошибка, приведенная к исполнительной оси.

Если общий коэффициент усиления выбрать равным

$$K_\Omega = \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = \frac{24}{0,1} = 240 \text{ сек}^{-1},$$

то

$$\vartheta_m = \frac{\beta M_n}{K_\Omega i} = \frac{104,6 \cdot 57,3}{240 \cdot 1000} = 0^\circ,025$$

и

$$T_1 \leq 0,236 \frac{\sqrt{(0,1 + 0,025)^2}}{0,025 \sqrt{20}} = 0,0935 \text{ сек.}$$

Если величину общего коэффициента усиления увеличить, например, до

$$K_\Omega = 300 \text{ сек}^{-1},$$

то

$$\vartheta_m = \frac{\beta M_n}{K_\Omega i} = \frac{104,6 \cdot 57,3}{300 \cdot 1000} = 0^\circ,02$$

и

$$T_1 \leq 0,236 \frac{\sqrt{(0,1 + 0,02)^2}}{0,02 \sqrt{20}} = 0,11 \text{ сек.}$$

Для иллюстрации на рис. 144 построены л. а. х. соответствующие трем рассмотренным случаям.

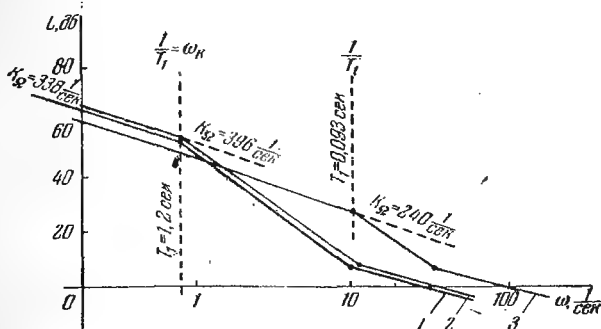


Рис. 144. Низкочастотные ветви желаемой л. а. х.: 1) без учета момента нагрузки; 2) с учетом момента нагрузки при первом методе демпфирования; 3) с учетом момента нагрузки при втором методе демпфирования.

268. Для системы регулирования построить низкочастотную часть желаемой л. а. х., если известно, что при изменении входного задающего воздействия по закону $\theta_1 = \theta_{1\max} \sin \omega_k t$, где

$$\theta_{1\max} = 30^\circ,$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = 12,56 \text{ сек}^{-1},$$

допустимая ошибка слежения не должна превышать по фазе $\Delta\varphi \leq 1^\circ$, по амплитуде $\frac{\Delta\theta}{\theta_{1\max}} \leq 1\%$. Система обладает астатизмом первого порядка. В области низких частот передаточная функция разомкнутой системы аппроксимируется выражением

$$W(j\omega) = \frac{K_\Omega}{j\omega(1 + j\omega T_1)}.$$

Решение. На рис. 145, а показана векторная диаграмма ошибок. Ошибка слежения

$$\vartheta = \frac{\theta_1}{1 + W(j\omega_k)} = (P + jS) \theta_1 = \vartheta_A + \vartheta_\varphi,$$

где ϑ_A — синфазная составляющая ошибки, ϑ_φ — квадратурная составляющая ошибки. Фазовая ошибка

$$\Delta\varphi = \arctg \frac{|\vartheta_\varphi|}{|\vartheta_1 - \vartheta_A|},$$

относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_{\text{imax}}} = \frac{|\vartheta_1| - |\vartheta_2|}{\vartheta_{\text{imax}}}.$$

Если считать, что при частоте ω_k модуль $|W(j\omega_k)| \gg 1$, то фазовую ошибку можно подсчитать по приближенной формуле

$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{\vartheta_{\text{imax}}} \text{Im} \frac{\vartheta_{\text{imax}}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k}{K_\Omega},$$

а относительную амплитудную ошибку — по формуле

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_{\text{imax}}} \approx \frac{\vartheta_A}{\vartheta_{\text{imax}}} \approx \frac{1}{\vartheta_{\text{imax}}} \text{Re} \frac{\vartheta_{\text{imax}}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k^2 T_1}{K_\Omega} = \frac{\omega_k^2}{K_\varepsilon}.$$

Задание величины фазовой и относительной амплитудной ошибок определяет предельное левое положение

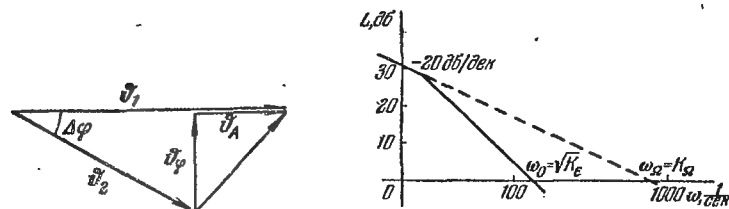


Рис. 145. а) Векторная диаграмма ошибок; б) низкочастотная часть желаемой л. а. х.

первой и второй асимптот л. а. х.:

$$\omega_\Omega = K_\Omega = \frac{\omega_k}{\Delta\varphi} = \frac{12,56 \cdot 57,3}{1} = 720 \text{ сек}^{-1}.$$

Вид низкочастотной части желаемой л. а. х. показан на рис. 145, б.

269. Для замкнутой системы комбинированного управления определить уровни компенсирующих сигналов

по первой и второй производным от входного воздействия, при которых в системе, обладающей астатизмом первого порядка, устраняются скоростная ошибка и ошибка, зависящая от ускорения. Структурная схема замкнутой системы комбинированного управления приведена на рис. 146. Компенсирующие сигналы имеют вид

$$\varphi(p) \vartheta_1 = (\tau_1 p + \tau_1 \tau_2 p^2) \vartheta_1,$$

где τ_1 — отношение крутизны сигнала по первой производной от ϑ_1 к крутизне сигнала по ошибке ϑ , τ_2 — отношение крутизны сигнала по второй производной к крутизне сигнала по первой производной от ϑ_1 .

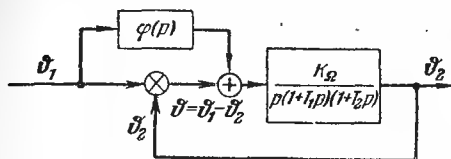


Рис. 146. Структурная схема следящей системы комбинированного управления.

Решение. В системе комбинированного управления выходная величина ϑ_2 пропорциональна не только ошибке ϑ , но и компенсирующему сигналу $\varphi(p) \vartheta_1$, т. е.

$$\vartheta_2 = W(p) [\vartheta + \varphi(p) \vartheta_1],$$

где $W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Ошибка в замкнутой системе равна

$$\vartheta = \frac{[1 - W(p) \varphi(p)] \vartheta_1}{1 + W(p)}.$$

Подставляя значения $W(p)$ и $\varphi(p)$, получим

$$\vartheta = \frac{[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 - K_\Omega \tau_1 \tau_2) p^2 + (1 - K_\Omega \tau_1) p] \vartheta_1}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_\Omega}.$$

При выполнении условия

$$\tau_1 = \frac{1}{K_{\Omega}}$$

в системе устраняется скоростная ошибка. При дополнительном условии

$$T_1 + T_2 = K_{\Omega} \tau_1 \tau_2$$

или

$$\tau_2 = T_1 + T_2$$

обращается также в нуль ошибка, зависящая от ускорения.

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы соответствует системе, имеющей астатизм третьего порядка:

$$\begin{aligned} W_{\Sigma}(p) &= \frac{W(p)[1 + \Phi(p)]}{1 - W(p)\Phi(p)} = \\ &= \frac{K_{\Omega}(1 + \tau_1 p + \tau_1 \tau_2 p^2)}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 - K_{\Omega} \tau_1 \tau_2) p^2 + (1 - K_{\Omega} \tau_1) p} = \\ &= \frac{K_{\Omega}(1 + \tau_1 p + \tau_1 \tau_2 p^2)}{T_1 T_2 p^3}. \end{aligned}$$

§ 6.2. Алгебраические методы выбора параметров САР

270. Система регулирования напряжения с угольным регулятором (рис. 147) описывается уравнением третьего порядка

$$\begin{aligned} [(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + k_0 k_p] \Delta u = \\ = (T_1 p + 1)(1 + T_2 p) f(t), \end{aligned}$$

где $T_0 = 0,02$ сек — постоянная времени генератора (объекта регулирования), $k_0 = 36$ в/ом — коэффициент передачи генератора, T_1 — постоянная времени чувствительного элемента (обмотки электромагнита), T_2 — постоянная времени регулятора (угольного столба), $k_p = 0,405$ ом/в — коэффициент передачи регулятора.

Выбрать варьируемые параметры системы регулирования T_1 , T_2 так, чтобы обеспечить степень устойчивости $h_0 \geq 0,4$ при колебательной форме переходного процесса.

Решение. Обратимся к диаграмме Вышнеградского (приложения 7 и 8). Характеристическое уравнение

системы регулирования имеет вид

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (1)$$

где

$$a_0 = T_0 T_1 T_2, \quad a_1 = T_0 T_1 + T_1 T_2 + T_0 T_2,$$

$$a_2 = T_0 + T_1 + T_2, \quad a_3 = 1 + k_0 k_p.$$

Приведем его к нормированному виду

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \frac{a_1}{a_0} = \frac{T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2}{T_0^2 T_1^2 T_2^2 (1 + k_0 k_p)}$$

и

$$B = \frac{a_2}{a_0} = \frac{T_0 + T_1 + T_2}{T_0 T_1 T_2 (1 + k_0 k_p)^2} \quad (3)$$

— параметры Вышнеградского.

Решить задачу можно было бы, задавшись предварительно значениями A и B (например, $A=4$ и $B=3$),

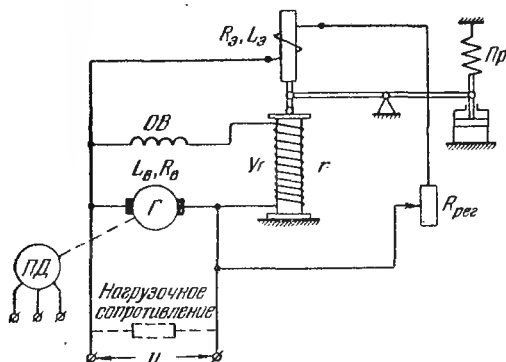


Рис. 147. Система регулирования напряжения с угольным регулятором.

удовлетворяющими поставленным требованиям. Однако такой путь определения T_1 и T_2 связан с решением

системы двух кубических уравнений. Проще можно найти значения T_1 и T_2 методом последовательных приближений, задаваясь их численными значениями и наблюдая

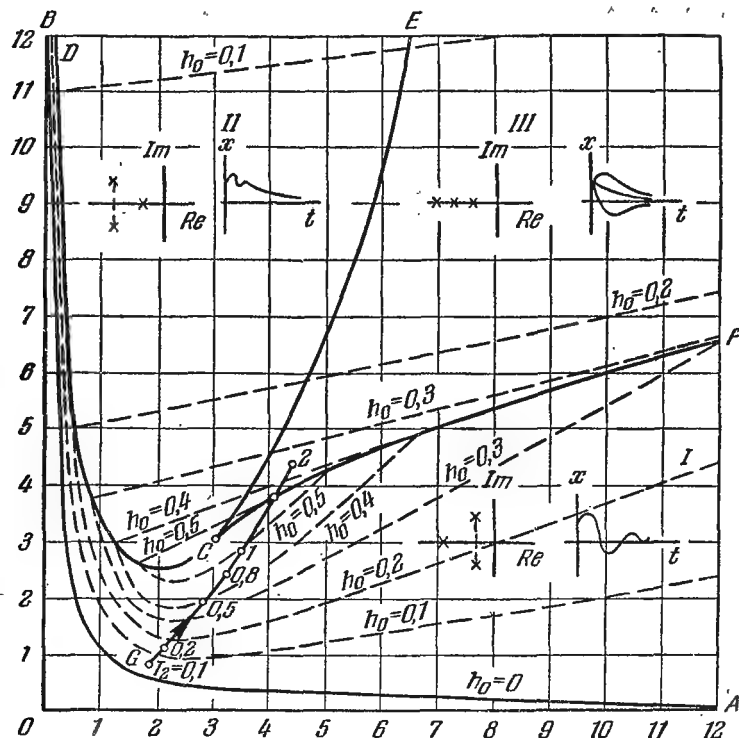


Рис. 148. Построение траектории на диаграмме Вышнеградского.

траекторию точки с координатами A и B на диаграмме Вышнеградского.

Подставляя заданные значения параметров в (3), получим расчетные формулы для вычисления A и B :

$$A = \frac{0,2(T_1 + T_2) + 10T_1T_2}{3 \cdot 1,84 \sqrt{(T_1T_2)^2}}, \quad B = \frac{0,02 + T_1 + T_2}{3 \cdot 1,7 \sqrt{T_1T_2}}. \quad (4)$$

Результаты вычислений A и B по формулам (4) при изменении T_2 и при $T_1 = 0,01$ сек приведены ниже.

$T_2, \text{сек}$	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2
A	1,8	2,1	2,8	3,3	3,5	3,8
B	0,8	1,1	1,9	2,4	2,8	4,4

На диаграмме Вышнеградского (рис. 148) построена траектория точки $G(A, B)$. Из построения следует, что для обеспечения поставленного требования $h_0 > 0,4$ достаточно при $T_1 = 0,1$ сек выполнение условия

$$0,5 < T_2 < 1,8. \quad (5)$$

Это условие может быть выполнено соответствующей настройкой демпфера регулятора.

Если бы траектория G не попала в желаемую область диаграммы Вышнеградского, то нам пришлось бы изменить значение T_1 и аналогичным образом найти новую, смещенную траекторию, проходящую через нужный участок диаграммы.

Изменения параметров T_1 и T_2 следует вести, согласуясь с технической возможностью обеспечения задаваемых значений.

271. Для следящей системы, схема которой приведена на рис. 149, определить требуемые значения коэффициента усиления усилителя k_y и коэффициента передачи по петле обратной связи k_0 при заданных значениях общего коэффициента усиления системы $K_\Omega = 500 \text{ сек}^{-1}$ и степени затухания переходного процесса $\eta = 98\%$. Передаточная функция разомкнутой системы с учетом тахометрической обратной связи имеет вид

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta} = W(p) = \frac{\frac{K}{1+k_0}}{p \left(1 + \frac{T_M}{1+k_0} p \right)} = \frac{K_\Omega}{p \left(1 + \frac{T_M}{1+k_0} p \right)},$$

где $T_M = 0,03 \text{ сек}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя, $K = k_1 k_{\text{тр}} k_y k_{\text{дв}}$ — общий коэффициент

откуда

$$k_y = \frac{(\pi^2 + 4)}{16T_M k_1 k_{дв} k_{тр}} (1 + k_0)^2.$$

Общий коэффициент усиления системы K_Ω связан с коэффициентом усиления K соотношением

$$K_\Omega = \frac{K}{1 + k_0} = \frac{\pi^2 + 4}{16T_M} (1 + k_0). \quad (4)$$

Из этого равенства следует, что

$$k_0 = \frac{16T_M}{\pi^2 + 4} K_\Omega - 1. \quad (5)$$

Численные значения коэффициентов равны

$$k_0 = \frac{16 \cdot 0,03}{3,14^2 + 4} 500 - 1 = 16,3,$$

$$K = K_\Omega (1 + k_0) = 500 (1 + 16,3) = 8700 \text{ сек}^{-1},$$

$$k_y = \frac{K}{k_1 k_{дв} k_{тр}} = \frac{8700 \cdot 0,55}{1 \cdot 3} = 1617,$$

$$k_{0.с} = \frac{k_0}{k_y k_{дв}} = \frac{16,3 \cdot 0,55}{1617} = 0,0057 \text{ в} \cdot \text{сек/рад}.$$

272. Пользуясь методом стандартных переходных характеристик [2,15] (см. приложение 18), выбрать параметры системы регулирования так, чтобы время затухания переходного процесса было $t \leq 1,5 \text{ сек}$, а величина перерегулирования $\sigma \leq 10\%$. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e (1 + T_1 p)}{p^2 (1 + T_2 p)},$$

где K_e — общий коэффициент усиления разомкнутой системы по ускорению, T_1 и T_2 — постоянные времени.

Решение. Соответствующая стандартная передаточная функция имеет вид (приложение 18)

$$W(p) = \frac{6,3\omega_0^2 p + \omega_0^3}{p^3 + 5,1\omega_0} = \frac{\frac{\omega_0^2}{5,1} \left(1 + \frac{6,3}{\omega_0} p\right)}{p^2 \left(1 + \frac{1}{5,1\omega_0} p\right)}.$$

Приравнивая ее заданной передаточной функции, получим условия для выбора параметров:

$$K_e = \frac{\omega_0^2}{5,1}, \quad T_1 = \frac{6,3}{\omega_0}, \quad T_2 = \frac{1}{5,1\omega_0}.$$

Для того чтобы время затухания переходного процесса не превышало заданной величины, необходимо, чтобы

$$\omega_0 = \frac{\tau}{t} = \frac{9}{1,5} = 6 \text{ сек}^{-1},$$

где τ — время переходного процесса. Тогда

$$K_e = \frac{36}{5,1} = 7,05 \text{ сек}^{-2},$$

$$T_1 = \frac{6,3}{6} = 1,05 \text{ сек},$$

$$T_2 = \frac{1}{5,1 \cdot 6} = 0,032 \text{ сек}.$$

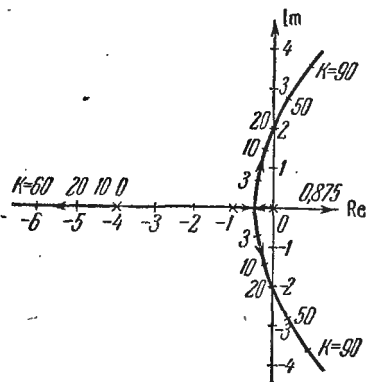


Рис. 150. Корневой годограф к задаче 274.

Разомкнутой системы должна иметь вид

$$W(p) = \frac{7,05(1 + 1,05p)}{p^2(1 + 0,0326p)}.$$

273. Пользуясь методом стандартных переходных характеристик (приложение 18), выбрать параметры следящей системы так, чтобы общий коэффициент усиления разомкнутой системы по ускорению был бы $K_e \geq 100 \text{ сек}^{-2}$, а величина перерегулирования $\sigma \leq 10\%$. Общий вид передаточной функции разомкнутой системы тот же, что в задаче 272.

Ответ.

$$W(p) = \frac{100(1 + 0,28p)}{p^2(1 + 0,0087p)}.$$

274. Для системы автоматического регулирования, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную

функцию

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{k}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)},$$

где $T = 1$ сек, $T_2 = 0,25$ сек, $k = \frac{K}{T_1 T_2}$, построить корневой годограф.

Ответ. Корневой годограф состоит из трех ветвей, поскольку знаменатель функции $W(p)$ имеет третью степень. Вид годографа показан на рис. 150.

§ 6.3. Частотные методы выбора параметров САР. Расчет последовательных корректирующих устройств

275. Построить желаемую л. а. х. и произвести выбор последовательного корректирующего устройства для системы автоматического регулирования, если передаточная функция разомкнутой системы при отсутствии корректирующего устройства имеет вид

$$W(p) = \frac{K_0}{p(p+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p)},$$

где $T_1 = 0,1$ сек, $T_2 = 0,02$ сек, $T_3 = 0,01$ сек, $T_4 = 0,005$ сек.

Система регулирования должна быть астатической системой первого порядка и удовлетворять следующим показателям качества: а) коэффициент ошибки по скорости $C_1 = \frac{1}{200}$ сек, б) коэффициент ошибки по ускорению $C_2 = 0,06$ сек², в) перерегулирование σ при единичном ступенчатом управляющем воздействии не должно превышать 30%, г) время переходного процесса t_n при единичном ступенчатом управляющем воздействии не должно быть больше чем 0,8 сек при числе колебаний, не превышающем двух.

Решение. В соответствии с методом [30, 32] на рис. 151 построена исходная л. а. х. L нескорректированной системы с коэффициентом усиления K_0 , равным требуемому

$$K_0 = \frac{1}{C_1} = 200 \text{ сек}^{-1}.$$

желаемой л. а. х., имеющей наклон 40 дб на декаду, дает вторую сопрягающую частоту, $\omega_2 = 1,3 \text{ сек}^{-1}$. В рассматриваемом примере $\omega_c/\omega_2 > 10$, что вполне допустимо. Таким образом, желаемый вид $L_{ж}$ при $\omega < \omega_c$ найден. Перейдем к выбору формы $L_{ж}$ при $\omega > \omega_c$, обращая особое внимание на то, чтобы на каждом из участков наклон желаемой л. а. х. возможно меньше отличался от наклона исходной л. а. х.

Попытаемся удовлетворить заданным условиям качества, ограничившись разностью наклонов между $L_{ж}$ и L , не превышающей 20 дб на декаду. Тогда $L_{ж}$ должна иметь, как это ясно из рис. 151, сопрягающие частоты $\omega_3 = 50 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_4 = 100 \text{ сек}^{-1}$, соответствующие сопрягающим частотам исходной л. а. х. Начиная с частоты $\omega_5 = 200 \text{ сек}^{-1}$, желаемая л. а. х. совпадает с исходной л. а. х. Желаемая передаточная функция имеет вид

$$W_{ж}(p) = \frac{K_{\Omega} \left(1 + \frac{p}{1,3}\right)}{p \left(1 + \frac{p}{0,08}\right) \left(1 + \frac{p}{50}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2}.$$

Запас устойчивости определяется видом логарифмических характеристик в области средних частот, т. е. в интервале $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$. Проверим, имеет ли полученная л. а. х. $L_{ж}$ требуемый запас устойчивости по фазе при $L_{ж} = 16 \text{ дб}$ ($\omega = \omega_2$), 0 дб ($\omega = \omega_c$) и 14 дб ($\omega = \omega_3$).

Согласно рис. 151 при $L_{ж} = 16 \text{ дб}$ $\omega = 2 \text{ сек}^{-1}$ и

$$\psi(2) = -90 - \operatorname{arctg} \frac{2}{0,08} + \operatorname{arctg} \frac{2}{1,3} = -121^\circ.$$

Это соответствует запасу по фазе

$$\mu = 180^\circ + \psi = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ.$$

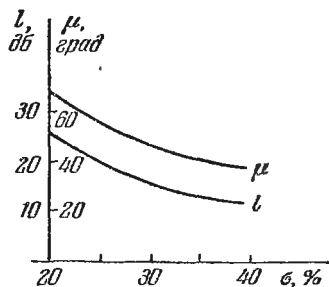


Рис. 152. Кривые для выбора запаса устойчивости по модулю l и по фазе μ .

При $L_{ж} = -14 \text{ дб}$, $\omega = 50 \text{ сек}^{-1}$,

$$\psi(56) = -90 - \arctg \frac{50}{50} - \arctg \frac{50}{100} - 2 \arctg \frac{50}{200} = -190^\circ$$

и соответственно $\mu = 180^\circ - 190^\circ = -10^\circ$.

При $L_{ж} = 0$, $\omega = \omega_c = 14 \text{ сек}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \psi(14) = & -90^\circ - \arctg \frac{14}{0,08} + \arctg \frac{14}{1,2} - \arctg \frac{14}{50} - \\ & - \arctg \frac{14}{100} - 2 \arctg \frac{14}{200} = -108^\circ, \end{aligned}$$

и соответственно

$$\mu = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Из трех полученных значений $\psi(\omega)$ только второе не укладывается в требуемые пределы. Это может привести к незначительному увеличению абсолютного значения $|P_{\min}|$ по сравнению с принятым ($|P_{\min}| = P_{\max} - 1 = 0,3$), что, как известно [30, 32], несущественно.

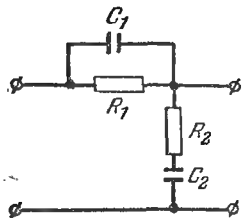


Рис. 153. Пассивное интегро-дифференцирующее звено.

Поэтому найденная л. а. х. $L_{ж}$ может использоваться для синтеза корректирующих средств.

Вычитая ординаты L из ординат желаемой л. а. х. $L_{ж}$ (рис. 151), получим л. а. х. последовательного корректирующего устройства, которая на рис. 151 не показана. В рассматриваемой задаче в качестве корректирующего устройства нужно использовать пассивное интегро-дифференцирующее звено (рис. 153), передаточная функция которого имеет вид

$$W_k(p) = \frac{\left(1 + \frac{p}{1,3}\right) \left(1 + \frac{p}{10}\right)}{\left(1 + \frac{p}{0,08}\right) \left(1 + \frac{p}{200}\right)} = \frac{(1 + 0,77p)(1 + 0,1p)}{(1 + 12,5p)(1 + 0,005p)}.$$

Для проверки полученных результатов построим фазовую характеристику $\psi_{ж}(\omega)$ (рис. 151), а также, пользуясь номограммой приложения 11, определим вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ замкнутой системы (рис. 154, а). Применяя метод трапецеидальных

характеристик, построим график переходного процесса (рис. 154, б). Переходный процесс в системе удовлетворяет заданным показателям качества.

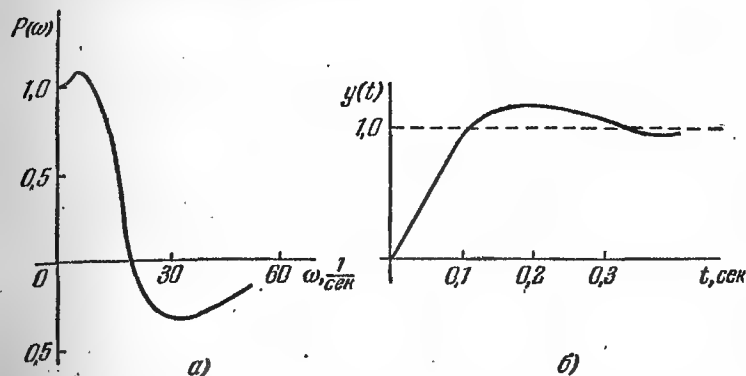


Рис. 154. а) Вещественная частотная характеристика замкнутой системы; б) график переходного процесса.

276. Произвести выбор последовательного корректирующего устройства для системы автоматического регулирования. Передаточная функция разомкнутой системы без коррекции имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где $T_1 = 0,05$ сек, $T_2 = 0,1$ сек, $T_3 = 0,2$ сек. Скорректированная система должна обеспечивать следующие показатели качества переходного процесса при ступенчатом управляющем воздействии: а) перерегулирование $\sigma \leq 20\%$; б) время затухания переходного процесса $t_n \leq 0,6$ сек при числе колебаний $n \leq 3$; в) установившаяся ошибка Δ не должна превышать 3%.

Решение. Произведем выбор корректирующего устройства при помощи амплитудно-фазовых характеристик [1, 36]. Для получения установившейся ошибки в 3% необходимо, чтобы коэффициент передачи системы был не ниже

$$K = \frac{1 - \Delta}{\Delta} = \frac{1 - 0,03}{0,03} = 32.$$

Для построения амплитудно-фазовой характеристики скорректированной системы нужно выбрать соответствующую форму вещественной частотной характеристики $P(\omega)$.

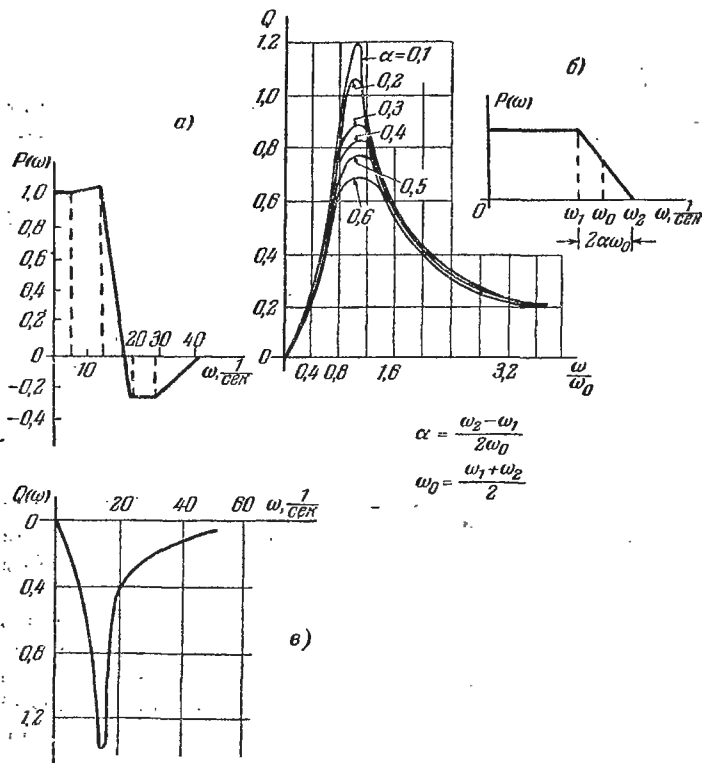


Рис. 155. а) Вещественная частотная характеристика; б) график $Q = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$; в) мнимая частотная характеристика.

Исходя из заданных показателей качества, а также задавая коэффициентом наклона $\alpha = 0,7$, найдем, пользуясь номограммой (см. приложение 14), значения вещественной частотной характеристики $P(\omega)$, обеспечивающей нужные качественные показатели скорректированной системы. Для $\sigma = 20\%$ и $P_{\max} = 1,0$ находим $P_{\min} = 0,3$;

запас устойчивости по модулю $\Delta R = 55\%$, запас по фазе $\Delta\varphi = 40^\circ$, а также $t_{\Pi} = \frac{3,8\pi}{\omega_{\Pi}}$. При заданном времени регулирования получим интервал положительности

$$\omega_{\Pi} = \frac{3,8\pi}{t_{\Pi}} = \frac{3,8\pi}{0,6} \approx 20 \text{ сек}^{-1}.$$

На основании значения ω_{Π} и параметров, положенных в основу номограммы приложения 14, построена вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ (рис. 155, а).

$$\text{Начальная ордината } P(0) = \frac{K}{1+K} = \frac{32}{1+32} = 0,97,$$

$$\omega_d = x\omega_{\Pi} 0,7 \cdot 20 = 14 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_b = \lambda\omega_{\Pi} 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_a = x_a\omega_b 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_2 = 25 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_2}{\lambda_1} = \frac{25}{0,6} = 42 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_1 = x_1\omega_0 = 0,7 \cdot 42 = 29 \text{ сек}^{-1}.$$

При помощи графика $Q = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, составленного для трапеции высотой, равной единице (рис. 155, б), построена мнимая частотная характеристика замкнутой системы (рис. 155, в).

По характеристикам $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ легко построить амплитудно-фазовую характеристику скорректированной системы [36]. Эта характеристика построена на рис. 156, а по данным табл. 1. На рис. 156, б пунктирной линией изображена амплитудно-фазовая характеристика нескорректированной системы (табл. 2).

Таблица 1

Амплитудно-фазовая характеристика скорректированной системы

$\omega, \text{сек}^{-1}$	20	25	30	40	50
$R_c(\omega)$	0,37	0,20	0,17	0,11	0,06
$\psi_c(\omega)$	-116°	-130°	-150°	-160°	-181°

Таблица 2

Амплитудно-фазовая характеристика
нескорректированной системы

$\omega, \text{сек}^{-1}$	15	20	25	30	40	50
$R(\omega)$	4,6	2,3	1,15	0,99	0,5	0,23
$\psi(\omega)$	-164°	-185°	-200°	-208°	-220°	-231°

Модуль и аргумент амплитудно-фазовой характеристики корректирующего устройства получаются из харак-

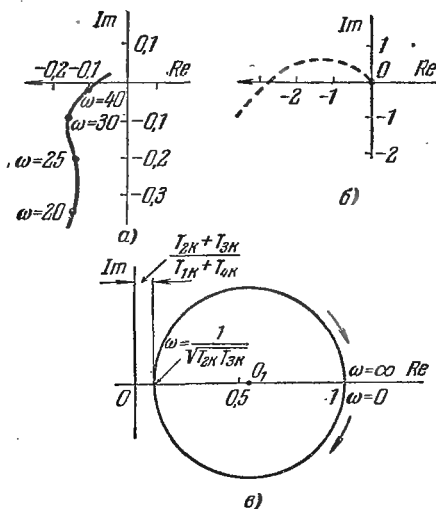


Рис. 156. Амплитудно-фазовые характеристики: а) скорректированной системы; б) нескорректированной системы; в) корректирующего устройства.

теристик нескорректированной и скорректированной систем

$$R_k(\omega) e^{j\psi_k(\omega)} = \frac{R_c(\omega)}{R(\omega)} e^{j[\psi_c(\omega) - \psi(\omega)]}$$

Данные вычислений сведены в табл. 3.

Таблица 3

Амплитудно-фазовая характеристика
корректирующего устройства

$\omega, \text{сек}^{-1}$	15	20	25	30	40	50
$R_K(\omega)$	0,23	0,16	0,174	0,17	0,22	0,26
$\psi_K(\omega)$	33°	69°	70°	58°	60°	50°

По найденным значениям можно построить амплитудно-фазовую характеристику корректирующего устройства.

Дальнейшее решение задачи состоит в том, чтобы выбрать такой тип корректирующего контура, амплитудно-фазовая характеристика которого наиболее близко совпадает с расчетной амплитудно-фазовой характеристикой корректирующего устройства.

Предположим, что в области низких и высоких частот амплитудно-фазовые характеристики скорректированной и нескорректированной систем должны совпадать. Тогда в качестве корректирующего контура следует выбрать пассивное интегро-дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W_K(p) = \frac{(1 + T_{2K}p)(1 + T_{3K}p)}{(1 + T_{1K}p)(1 + T_{4K}p)}.$$

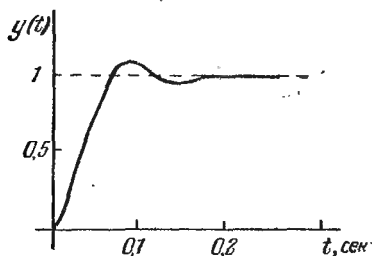
Амплитудно-фазовая характеристика этого контура представляет собой окружность с центром в точке O_1 (рис. 156, в). Взяв для любых четырех точек значения модуля R_K или фазы ψ_K , найдем постоянные времени $T_{1K}=1,85 \text{ сек}$, $T_{2K}=0,18 \text{ сек}$, $T_{3K}=0,08 \text{ сек}$, $T_{4K}=0,02 \text{ сек}$.

277. Определить передаточную функцию последовательного корректирующего устройства для следящей системы, передаточная функция которой имеет вид

$$W(p) = \frac{K_E}{p^2 (1 + T_1 p) (1 + T_2 p) (1 + T_3 p)},$$

где $T_1=0,04 \text{ сек}$, $T_2=0,01 \text{ сек}$, $T_3=0,002 \text{ сек}$. Следящая система должна иметь астатизм второго порядка

и удовлетворять следующим показателям качества: а) общий коэффициент усиления по ускорению $K_e \geq 100 \text{ сек}^{-2}$; б) перерегулирование $\sigma \leq 30\%$; в) время затухания переходного процесса $t_n \leq 0,45 \text{ сек}$.



Ответ.

$$W_k(p) = \frac{(1 + 0,25p)(1 + 0,04p)}{(1 + 0,0029p)(1 + 0,00066p)}$$

График переходного процесса построен на рис. 157.

278. Произвести дина-

мический синтез следящей системы по следующим качественным пока-

зателям: ошибка $x_{\max} \leq 0,1 \text{ град}$ при максимальной скорости слежения $\Omega_{1\max} = 20 \text{ град/сек}$ и максимальном ускорении $\varepsilon_{1\max} = 5 \text{ град/сек}^2$; запас устойчивости оценивается по показателю колебательности $M \leq 1,5$.

Передаточная функция исходной нескорректированной системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1 + Tp)}$$

где $T = 0,1 \text{ сек}$.

Решение. Определяем запретную область по точности (рис. 158):

$$\omega_k = \frac{\varepsilon_{1\max}}{\Omega_{1\max}} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_\Omega = \frac{\Omega_{1\max}}{x_{\max}} = \frac{20}{0,1} = 200 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{0.к} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{1\max}}{x_{\max}}} = \sqrt{\frac{5}{0,1}} = 7,07 \text{ сек}^{-1}.$$

Желаемую л. а. х. системы $L_{ж}$ в области низких частот формируем из двух отрезков прямых, имеющих наклон -20 дб/дек и -40 дб/дек с точкой излома на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T_1} = 0,25 \text{ сек}^{-1}.$$

Для обеспечения требуемой точности $L_{ж}$ приподнимаем над запретной областью на 3 дб , т. е. необходи-

мое значение общего коэффициента усиления определяется из условия

$$K_{\Omega} = 1,41 \omega_{\Omega} = 1,41 \frac{\Omega_{1\max}}{x_{\max}} = 282 \text{ сек}^{-1}$$

и

$$\omega_0 = 1,19 \omega_{0.к} = 1,19 \sqrt{\frac{\varepsilon_{1\max}}{x_{\max}}} = 8,42 \text{ сек}^{-1}.$$

Определяем постоянные времени T_2 и T_3 (см. рис. 158):

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{8,42} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,206 \text{ сек},$$

$$T_3 = \frac{T_2}{h} = \frac{T_2(M-1)}{M+1} = 0,042 \text{ сек}.$$

Передаточная функция скорректированной системы, т. е.

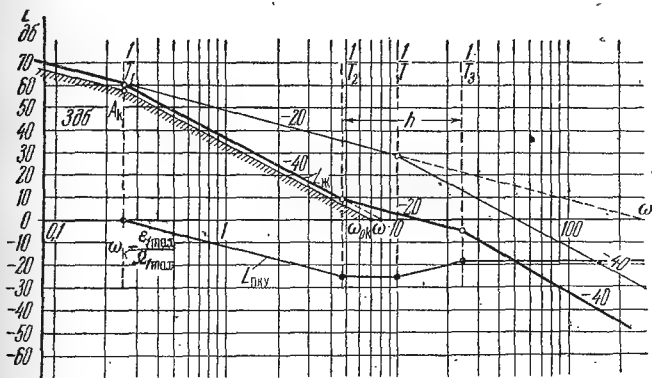


Рис. 158. Л. а. х. к задаче 278.

соответствующая желаемой л. а. х., может быть записана в виде

$$W_{ск}(p) = \frac{K_{\Omega}(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}.$$

Для коррекции системы следует использовать пассивное интегро-дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W_{пкy}(p) = \frac{(1 + T_2 p)(1 + T p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}.$$

Схема этого звена и его частотные характеристики показаны на рис. 159.

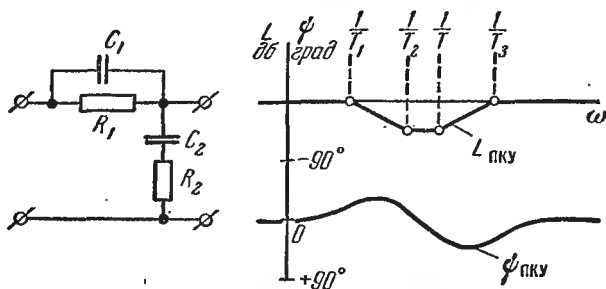


Рис. 159. Интегро-дифференцирующее звено и его частотные характеристики.

279. Определить последовательное корректирующее устройство и рассчитать необходимый коэффициент усиления усилителя k_2 для следящей системы, структурная

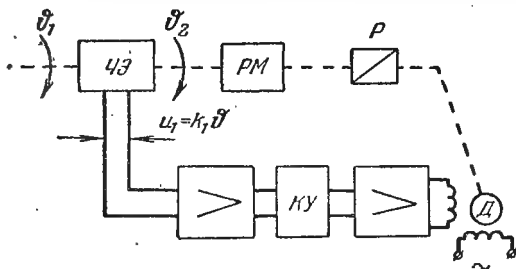


Рис. 160. Схема следящей системы.

схема которой изображена на рис. 160. На схеме обозначено:

Д — двигатель, КУ — корректирующее устройство, Р — редуктор, ЧЭ — чувствительный элемент, определяющий рассогласование, РМ — рабочий механизм, ϑ_1 и ϑ_2 — углы поворота задающей и исполнительной осей.

Исходные данные:

1) крутизна чувствительного элемента

$$k_1 = 10 \text{ мв/угл} \cdot \text{мин} = 34,4 \text{ в/рад};$$

2) передаточное отношение редуктора $i = 3500$;

3) максимальная скорость слежения $\Omega = 5 \text{ град/сек} = 300 \text{ угл. мин/сек}$;

4) максимальное ускорение

$$\varepsilon = 2 \text{ град/сек}^2 = 120 \text{ угл. мин/сек}^2;$$

5) максимальная ошибка $\phi_{\max} = 1'$;

6) максимальное напряжение выхода усилителя

$$U_{\max} = 110 \text{ в};$$

7) максимальная скорость двигателя при полном открытии усилителя $\Omega_{\text{д max}} = 6000 \text{ об/мин} = 630 \text{ 1/сек}$;

8) пусковой момент $M_0 = 100 \text{ Г} \cdot \text{см} = 9,81 \cdot 10^{-3} \text{ н} \cdot \text{м}$; механические характеристики двигателя совместно с усилителем представляют собой параллельные прямые;

9) момент нагрузки на оси двигателя $M_n = 10 \text{ Г} \cdot \text{см} = 9,81 \cdot 10^{-4} \text{ н} \cdot \text{м}$;

10) момент инерции, приведенный к оси двигателя, $J = 0,018 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2 = 17,6 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;

11) постоянная времени усилителя $T_y = 0,02 \text{ сек}$;

12) показатель колебательности $M \leq 1,5$.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы при отсутствии корректирующих устройств равна произведению передаточных функций звеньев:

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 \frac{1}{i}}{p(1 + T_{\text{дп}})(1 + T_{\text{yp}})} = \frac{K_{\Omega}}{p(1 + T_{\text{дп}})(1 + T_{\text{yp}})}. \quad (1)$$

Коэффициент передачи двигателя равен

$$k_3 = \frac{\Omega_{\text{д max}}}{U_{\max}} = \frac{630}{110} = 5,73 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Коэффициент наклона механических характеристик двигателя вместе с редуктором

$$\beta = \frac{\beta_0}{i} = \frac{\Omega_{\text{д max}}}{i M_0} = \frac{630}{3500 \cdot 100} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ 1/Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек} = 6,3 \text{ угл. мин/Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}.$$

Постоянная времени двигателя

$$T_{\text{д}} = \beta_0 J = \frac{630}{100} \cdot 0,018 \approx 0,1 \text{ сек}.$$

Для определения необходимого значения общего коэффициента усиления (добротности) по скорости K_Ω построим запретную зону для низкочастотной части л. а. х. (см. задачу 264). Контрольная частота

$$\omega_k = \frac{\varepsilon}{\Omega} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ сек}^{-1}.$$

Ордината контрольной точки

$$L_k = 20 \lg \frac{\Omega^2 + \beta M_n \Omega}{\vartheta_{\max} \varepsilon} = 20 \lg \frac{300^2 + 6,3 \cdot 10 \cdot 300}{1 \cdot 120} = 59 \text{ дб}.$$

Предельное значение добротности по скорости

$$K_\Omega = \frac{\Omega + \beta M_n}{\vartheta_{\max}} = \frac{300 + 6,3 \cdot 10}{1} = 363 \text{ сек}^{-1}.$$

По этим данным построена запретная область (рис. 161).

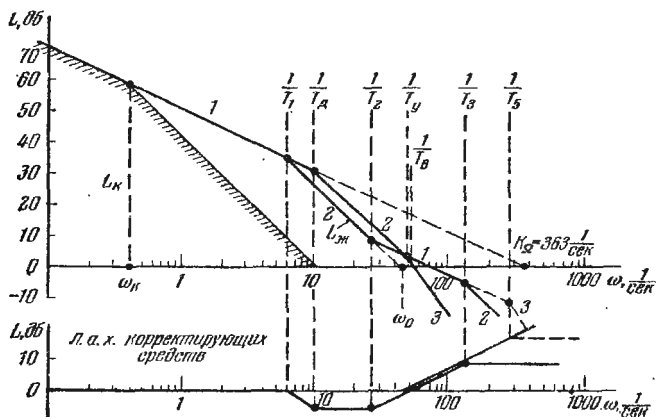


Рис. 161. Л. а. х. к задаче 279.

Проверим возможность работы следящей системы без корректирующих звеньев. Так как первая сопрягающая частота л. а. х. передаточной функции (1), равная $\omega_1 = \frac{1}{T_n} = 10 \text{ сек}^{-1}$, значительно больше контрольной частоты $\omega_k = 0,8 \text{ сек}^{-1}$, то можно в качестве окончательного значения добротности по скорости принять

значение, равное 363 сек^{-1} . Соответствующая л. а. х. типа 1—2—3 показана на рис. 161.

Допустимая сумма постоянных времени

$$\sum T = \frac{1}{K_{\Omega}} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} = \frac{1}{363} \frac{1,5^2 + 1,5 \sqrt{1,5^2 - 1}}{2} = 0,0054 \text{ сек.}$$

В действительности сумма имеющихся постоянных времени

$$\sum T = T_{\Delta} + T_{\gamma} = 0,10 + 0,02 = 0,12 \text{ сек.}$$

Таким образом, убеждаемся, что без корректирующих устройств система не будет обладать требуемым показателем качества.

Рассмотрим возможный способ улучшения динамических свойств системы при помощи последовательных звеньев [4].

При введении в прямой канал пассивного звена, содержащего инерционную часть, необходимо так сформировать желаемую л. а. х., чтобы пик ошибки в районе перемены знака скорости не превосходил заданного максимального значения $\vartheta_{\max}$. Найденному значению добротности по скорости $K_{\Omega} = 363 \text{ сек}^{-1}$ соответствует добротность по моменту

$$K_M = \frac{K_{\Omega}}{\beta} = \frac{363}{6,3} \approx 57,5 \text{ Г} \cdot \text{см/угл} \cdot \text{мин.}$$

Моментная ошибка

$$\vartheta_M = \frac{M_H}{K_M} = \frac{10}{57,5} \approx 0,174'.$$

Допустимое значение большей постоянной времени

$$T_1 = 0,236 \frac{\sqrt{(\vartheta_{\max} + \vartheta_M)^2}}{\vartheta_M \sqrt{e}} = 0,236 \frac{\sqrt{(1 + 0,174)^2}}{0,174 \sqrt{120}} = 0,16 \text{ сек.}$$

По добротности $K_{\Omega} = 363 \text{ сек}^{-1}$ и постоянной времени $T_1 = 0,16 \text{ сек}$ можно построить низкочастотную часть

л. а. х. (рис. 161). Базовая частота л. а. х.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\Omega}}{T_1}} = \sqrt{\frac{363}{0,16}} = 47,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Сформируем теперь низкочастотную и высокочастотную части желаемой л. а. х. типа 1-2-1-2. По базовой частоте определим требуемое значение второй постоянной времени:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{47,5} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,0365 \text{ сек.}$$

Третья постоянная времени равна

$$T_3 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{47,5} \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,0073 \text{ сек.}$$

По этим данным построена вся желаемая л. а. х. $L_{\text{ж}}$. Л. а. х. корректирующих средств получается в результате вычитания ординат располагаемой л. а. х. из ординат желаемой л. а. х. Эта 'разностная' л. а. х. также изображена на рис. 161. Из вида этой л. а. х. следует, что последовательно корректирующее устройство должно состоять из:

1) пассивного интегро-дифференцирующего звена с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{(1 + T_d p)(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_b p)},$$

где постоянная времени T_b определяется из известного свойства интегро-дифференцирующего звена

$$T_b = \frac{T_d T_2}{T_1} = \frac{0,05 \cdot 0,0365}{0,16} = 0,0114 \text{ сек};$$

2) идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией

$$W_{k2}(p) = 1 + T_y p,$$

3) комбинации пассивного дифференцирующего звена и линейного усилителя с общей передаточной функцией

$$W_{k3}(p) = \frac{1 + T_b p}{1 + T_3 p} = k_y \frac{\frac{T_3}{T_b} (1 + T_b p)}{1 + T_3 p}.$$

В случае включения сигнала от тахогенераторов в том же месте, куда включен и сигнал от основного

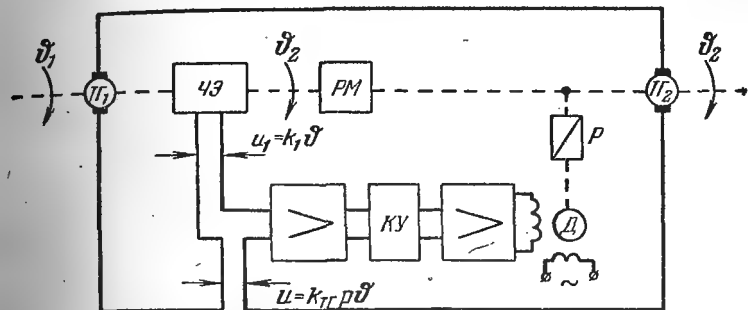


Рис. 162. Схема с тахогенераторами для получения звена чистого дифференцирования.

чувствительного элемента (рис. 162), требуемая крутизна напряжения каждого тахогенератора равна

$$k_{\text{тг}} = k_1 T_y = 10 \cdot 0,02 = 0,2 \text{ мв} \cdot \text{сек/угл} \cdot \text{мин} = \\ = 0,37 \text{ в} \cdot \text{сек/об} = 0,06 \text{ в} \cdot \text{сек}.$$

Пассивные звенья должны вводиться в прямой канал усиления и могут состоять из RC -цепей.

Коэффициент усиления усилителя с учетом дополнительного усиления, необходимого для работы пассивного дифференцирующего звена $k_y = \frac{T_B}{T_3}$, равен

$$k_2 = \frac{T_B}{T_3} = \frac{K_{\Omega}^i}{k_1 k_3} = \frac{0,0114}{0,0073} \frac{363 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 9850.$$

В случае невозможности установки тахогенераторов для введения производной от угла рассогласования можно изменить вид требуемых корректирующих средств.

Как видно из рис. 161, идеальное дифференцирующее звено получилось вследствие того, что высокочастотная асимптота исходной л. а. х. имеет большой наклон по сравнению с наклоном желаемой л. а. х. Для устранения этого можно изменить вид желаемой л. а. х. в высокочастотной области, перейдя от л. а. х. типа $1-2-1-2$ к л. а. х. типа $1-2-1-3$, но с тем же запасом устойчивости.

Высокочастотная часть последней л. а. х. показана на рис. 161 пунктиром. Ей соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_5 p)^2}.$$

Постоянная времени T_5 определяется как

$$T_5 = \frac{1}{2\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}} = \frac{T_3}{2} = 0,0036 \text{ сек.}$$

Л. а. х. корректирующего устройства показана для этого случая на рис. 161 также пунктиром. Из рассмотрения этой л. а. х. видно, что корректирующее устройство последовательного типа должно состоять из трех пассивных звеньев: интегро-дифференцирующего звена и двух пассивных дифференцирующих звеньев в комбинации с линейным усилителем с общей передаточной функцией

$$\begin{aligned} W_k(p) &= \frac{(1 + T_d p)(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_B p)} \cdot \frac{1 + T_B p}{1 + T_5 p} \cdot \frac{1 + T_y p}{1 + T_5 p} = \\ &= \frac{(1 + T_d p)(1 + T_2 p)(1 + T_y p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_5 p)^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент усиления k_y будет выше, чем в предыдущем случае,

$$k_y = \frac{T_y T_B}{T_5^2} = \frac{0,02 \cdot 0,0114}{0,0036^2} = 17,5.$$

Общий коэффициент усиления усилителя оказывается также значительно больше,

$$k_2 = k_y \frac{K_{\Omega i}}{k_1 k_3} = 17,5 \frac{363 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 110\,000.$$

Возможен и иной выбор высокочастотной части желаемой л. а. х., в частности, соответствующей передаточной функции вида

$$W(p) = \frac{K_Q (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_4 p) (1 + T_5 p)}.$$

При этом $T_4 \neq T_5$, но их сумма по-прежнему должна быть равной

$$T_4 + T_5 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

§ 6.4. Расчет дополнительных обратных связей и прямых параллельных корректирующих связей

280. Произвести расчет дополнительной обратной связи для следящей системы задачи 278.

Решение. Найдем дополнительную обратную связь $W_{oc}(p)$, эквивалентную пассивному интегро-дифференцирующему звену $W_{пкy}(p)$, полученному при решении задачи 278. Предположим, что дополнительная обратная связь охватывает часть системы с передаточной функцией

$$W_c(p) = \frac{k_c}{p (1 + T p)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{oc}(p) &= \frac{1 - W_{пкy}(p)}{W_{пкy}(p) W_c(p)} = \\ &= \frac{1 - \frac{(1 + T_2 p)(1 + T p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}}{\frac{(1 + T_2 p)(1 + T p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} \cdot \frac{k_c}{p (1 + T p)}} = \frac{k_{oc} p^2}{1 + T_2 p}, \end{aligned}$$

где :

$$k_{oc} = \frac{T_1 + T_3 - T_2 - T}{k_c}.$$

Возможная схема осуществления этой обратной связи показана на рис. 163.

281. Произвести выбор параметров жесткой тахометрической обратной связи для следящей системы, схема которой приведена на рис. 164. Исходные данные те же, что и в задаче 279, кроме $T_d = 0,05$ сек.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы с учетом действия тахометрической обратной связи примет вид

$$W(p) = \frac{K_{H\Omega}}{p(1 + ap + bp^2)}, \quad (1)$$

где $K_{H\Omega} = \frac{K_{\Omega}}{1 + k_{oc}}$ — новое значение общего коэффициента усиления по скорости (добротности по скорости), $a = \frac{T_d + T_y}{1 + k_{oc}}$ и $b = \frac{T_d T_y}{1 + k_{oc}}$ — коэффициенты эквивалентного

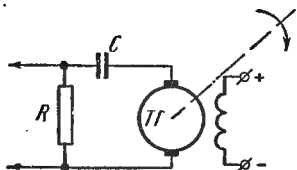


Рис. 163. Схема дополнительной обратной связи к задаче 280.

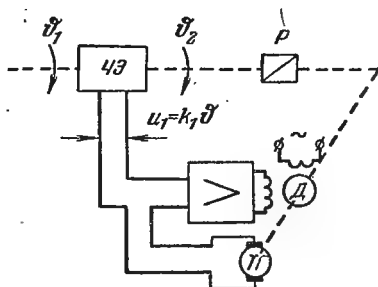


Рис. 164. Схема следящей системы с жесткой тахометрической обратной связью.

звена второго порядка, $k_{oc} = k_2 k_3 k_{тг}$ — коэффициент усиления канала обратной связи, $k_{тг}$ — крутизна тахогенератора и масштабирующего устройства в цепи обратной связи.

Для обеспечения необходимого запаса устойчивости, оцениваемого величиной показателя колебательности, следует соблюсти неравенство [2]

$$\frac{T_d + T_y}{1 + k_{oc}} = a \leq \frac{1}{K_{H\Omega}} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (2)$$

Нужно учесть также то обстоятельство, что введение жесткой тахометрической обратной связи изменяет в $(1 + k_{oc})$ раз наклон механических характеристик исполнительного двигателя. Требуемое значение добротности по скорости при учете более жестких механических

характеристик равно

$$K_{H\Omega} = \frac{\Omega_{\max} + \frac{\beta M_H}{1 + k_{oc} c}}{\phi_{\max}}. \quad (3)$$

Решая два последних уравнения совместно, можно определить требуемое значение коэффициента усиления канала обратной связи.

$$k_{oc} = \frac{\Omega_{\max} (T_d + T_y)}{2\mu\phi_{\max}} - 1 + \sqrt{\frac{\Omega_{\max}^2 (T_d + T_y)^2}{4\mu^2\phi_{\max}^2} + \frac{\beta M_H (T_d + T_y)}{\mu\phi_{\max}}} =$$

$$= \frac{300 \cdot 0,7}{2 \cdot 1,96 \cdot 1} - 1 + \sqrt{\frac{300^2 \cdot 0,07^2}{4 \cdot 1,96^2 \cdot 1} + \frac{6,3 \cdot 10 \cdot 0,07}{1,96 \cdot 1}} = 10,$$

где

$$\mu = \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} = \frac{1,5^2 + 1,5\sqrt{1,5^2 - 1}}{2} = 1,96.$$

Требуемое значение добротности по скорости (3)

$$K_{H\Omega} = \frac{300 + \frac{6,3 \cdot 10}{1 + 10}}{1} = 306 \text{ сек}^{-1}.$$

Допустимая сумма постоянных времени (2)

$$\sum T = \frac{1}{306} \frac{1,5^2 + 1,5\sqrt{1,5^2 - 1}}{2} = 0,0064 \text{ сек}.$$

Имеющаяся эквивалентная постоянная времени

$$a = \frac{T_d + T_y}{1 + k_{oc}} = \frac{0,07}{1 + 10} = 0,0064 \text{ сек}.$$

Таким образом, задачу выбора параметров цепи обратной связи можно считать решенной.

Передаточная функция разомкнутой демпфированной системы примет вид

$$W(p) = \frac{K_{H\Omega}}{p(1 + ap + ba^2)} = \frac{306}{p(1 + 6,4 \cdot 10^{-3}p + 9,1 \cdot 10^{-5}p^2)}.$$

В заключение определим требуемый коэффициент усиления усилителя и требуемую крутизну тахогенератора. Общий коэффициент усиления разомкнутой цепи следящей системы при отключенной обратной связи должен быть равен

$$K'_{n\Omega} = K_{n\Omega}(1 + k_{oc}) = 306 \cdot 11 \approx 3360 \text{ сек}^{-1}.$$

Коэффициент усиления усилителя

$$k_2 = \frac{K'_{n\Omega} i}{k_1 k_3} = \frac{3360 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 59\,500.$$

Требуемое значение крутизны тахогенератора с учетом масштабирующего устройства

$$k_{тг} = \frac{k_{oc}}{k_2 k_3} = \frac{15}{59\,500 \cdot 5,73} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ в} \cdot \text{сек}.$$

Большое значение коэффициента усиления усилителя является недостатком рассмотренного варианта введения обратной связи.

282. Произвести выбор параметров гибкой тахометрической обратной связи для следящей системы, схема

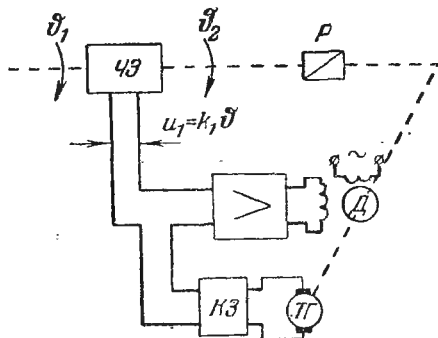


Рис. 165. Схема следящей системы с гибкой тахометрической обратной связью.

которой приведена на рис. 165. Исходные данные те же, что в задаче 279. Крутизна тахогенератора $k_{тг} = 0,05 \text{ в} \cdot \text{сек}$.

Решение. В связи с тем, что используется демпфирование по первому способу [4] (см. § 6.1), желаемую л. а. х. $L_{ж}$ можно так сформировать, чтобы ее первый излом совпадал с контрольной частотой точки A_k

(рис. 166). При этом л. а. х. должна быть поднята выше запретной зоны на 3 дБ. Требуемое значение добротности по скорости будет $K_{T\Omega} = \sqrt{2} K_{\Omega} = 1,41 \cdot 363 = 512 \text{ сек}^{-1}$.

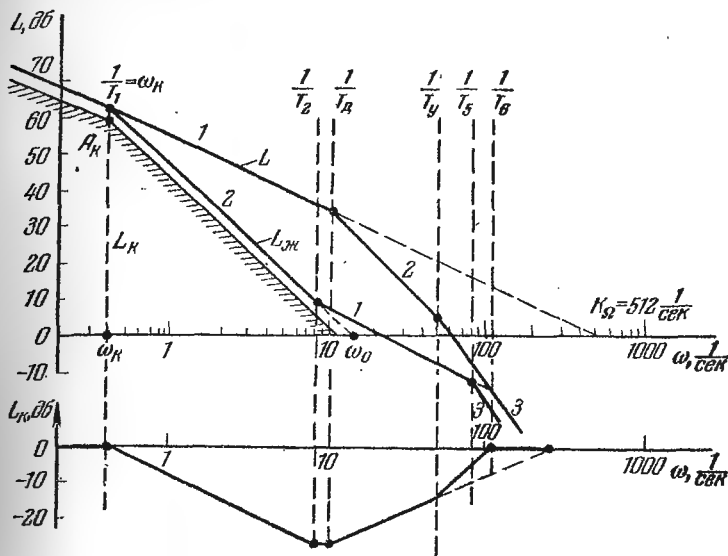


Рис. 166. Логарифмические амплитудные характеристики к задаче 282.

Это вызывает необходимость иметь коэффициент усиления усилителя

$$k_2 = \frac{K_{T\Omega} i}{k_1 k_3} = \frac{512 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 9100.$$

Базовая частота желаемой л. а. х.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{T\Omega}}{T_1}} = \sqrt{\omega_K K_{T\Omega}} = \sqrt{0,4 \cdot 512} = 14,3 \text{ сек}^{-1}.$$

Вторая постоянная времени желаемой л. а. х.

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{14,3} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,12 \text{ сек}^{-1}.$$

Допустимая сумма постоянных времени, соответствующих сопрягающим частотам правее частоты среза [2, 4],

равна

$$\sum T = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{14,3} \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,024 \text{ сек.}$$

Сформулируем желаемую л. а. х. таким образом, чтобы ее высокочастотная асимптота имела одинаковый наклон с высокочастотной асимптотой располагаемой л. а. х. L . В данном случае этот наклон составляет 60 дб/дек. Тогда в высокочастотной части желаемой л. а. х. можно иметь двойной излом при частоте $\omega_5 = \frac{1}{T_5}$. Соответствующая постоянная времени должна быть равна

$$T_5 = \frac{\sum T}{2} = \frac{0,024}{2} = 0,012 \text{ сек.}$$

Для упрощения корректирующих средств можно продолжить участок с единичным наклоном желаемой л. а. х. до совпадения высокочастотных асимптот $L_{\text{ж}}$ и L , что показано на рис. 166 пунктиром. Это даст некоторое увеличение запаса устойчивости. Постоянная времени, определяющая двойной излом желаемой л. а. х., может быть определена непосредственным измерением сопрягающей частоты. Она равна $T_6 = 0,009 \text{ сек.}$

Построенной таким образом желаемой л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_{\text{тн}}(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_6 p)^2} = \frac{512(1 + 0,12p)}{p(1 + 2,5p)(1 + 0,009p)^2}.$$

В дальнейшем мы будем ориентироваться на этот более простой случай.

На рис. 166 построена л. а. х. корректирующих устройств последовательного типа $L_{\text{к}}$, полученная вычитанием ординат L из ординат $L_{\text{ж}}$. Она соответствует последовательному включению интегро-дифференцирующего и дифференцирующего звеньев с передаточной функцией

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{(1 + T_2 p)(1 + T_{\text{дп}})(1 + T_{\text{yp}})}{(1 + T_1 p)(1 + T_6 p)^2}.$$

Полученная передаточная функция играет вспомогательную роль, так как по условию задачи коррекция

системы должна осуществляться обратной связью, а не последовательными звеньями. Поэтому, пользуясь ею, необходимо вычислить эквивалентную обратную связь.

Передаточная функция корректирующего звена в цепи тахогенератора может быть определена по формуле

$$W_{oc}(p) = \frac{1 - W_{пз}(p)}{W_{пз}(p) W_c(p)},$$

где $W_c(p) = \frac{k_2 k_3}{(1 + T_y p)(1 + T_d p)}$ — передаточная функция части системы, охватываемой обратной связью.

В результате подстановки значений $W_c(p)$ и $W_{пз}(p)$ имеем

$$W_{o.c}(p) = [(T_1 + 2T_6 - T_2 - T_d - T_y)p + (T_6^2 + 2T_1T_6 - T_2T_d - T_2T_y - T_dT_y)p^2 + (T_1T_6^2 - T_2T_dT_y)p^3] \times \\ \times [k_2 k_3 (1 + T_2 p)]^{-1}.$$

Такое звено является физически нереализуемым, так как степень многочлена в числителе выше степени многочлена знаменателя. Однако можно попытаться применить какое-либо физически реализуемое звено с передаточной функцией, близкой к желаемой. В качестве физически осуществимой передаточной функции можно взять, как первое приближение, функцию

$$W_{oc}(p) = \frac{T_1 p}{k_2 k_3 (1 + T_2 p)} = k_{o.c} \frac{T_2 p}{1 + T_2 p},$$

где $k_{o.c} = \frac{T_1}{T_2 k_2 k_3}.$

Эта передаточная функция может быть реализована при помощи тахогенератора постоянного тока, простого делителя и дифференцирующей RC-цепи с постоянной времени $T_2 = 0,12$ сек.

Потребный коэффициент передачи в цепи обратной связи

$$k_{o.c} = k_{тг} \cdot k_{дл} = \frac{2,5}{0,12 \cdot 9100 \cdot 5,73 \cdot 0,05} = 40,5 \cdot 10^{-5}.$$

Специальный делитель может и не устанавливаться, но в этом случае место включения обратной связи в усилители должно быть выбрано таким образом, чтобы

от этого места до выхода усилителя коэффициент усиления по напряжению составлял

$$k'_2 = k_2 k_{0.c} = 9100 \cdot 40,5 \cdot 10^{-5} = 3,6.$$

Таким образом, в первом приближении передаточная функция корректирующего звена в цепи обратной связи должна быть

$$W_{0.c}(p) = 40,5 \cdot 10^{-5} \frac{0,12p}{1 + 0,12p}.$$

Проверим теперь применимость этого звена для достижения нужных динамических качеств для формирования л. а. х. желаемого вида. Передаточная функция разомкнутой системы с учетом гибкой тахометрической обратной связи примет вид

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\tau\Omega} (1 + T_2 p)}{p (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)},$$

где

$$a_1 = T_y + T_d + T_2 + k_2 k_3 k_{0.c} T_2 = T_y + T_d + T_2 + T_1 = 2,74 \text{ сек},$$

$$a_2 = T_y T_d + T_y T_2 + T_d T_2 = 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^2,$$

$$a_3 = T_y T_d T_2 = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^3.$$

Раскладывая знаменатель полученной передаточной функции на множители, получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{ск}}(p) &= \frac{K_{\tau\Omega} (1 + T_2 p)}{p (1 + T p) (1 + a p + b p^2)} = \\ &= \frac{512 (1 + 0,12p)}{p (1 + 2,74p) (1 + 0,6 \cdot 10^{-2} p + 0,88 \cdot 10^{-4} p^2)}. \end{aligned}$$

В низкочастотной части эта передаточная функция практически совпадает с передаточной функцией, соответствующей желаемой л. а. х. $L_{\text{ж}}$. Небольшое отличие имеется только в величине постоянной времени $T_1 = 2,74 \text{ сек}$, формирующей первый излом л. а. х. В высокочастотной области условие ограничения суммы постоянных времени выполнено, так как $a = 0,6 \cdot 10^{-2} \text{ сек}$, а по условию допустимая сумма постоянных времени составляет $\sum T = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ сек}$.

Проверка того, чтобы пик амплитудной характеристики колебательного звена не заходил в запретную

область для высокочастотной части л. а. х., т. е.

$$\operatorname{mod} |W(j\omega)| < \frac{M}{M+1},$$

подтверждает допустимость подобной аппроксимации.

При желании можно получить более точное совпадение полученной передаточной функции с желаемой в низкочастотной области и устранить неравенство $T \neq T_1$. Для этого необходимо уточнить значение коэффициента k_{oc} и выбрать его равным

$$k'_{oc} = \frac{T_1}{T} k_{oc} = \frac{2,5}{2,74} \cdot 40,5 \cdot 10^{-5} = 37,4 \cdot 10^{-5}.$$

Тогда аналогичным образом можно получить скорректированную передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W_{ск}(p) = \frac{512(1 + 0,12p)}{p(1 + 2,5p)(1 + 0,65 \cdot 10^{-2}p + 0,95 \cdot 10^{-4}p^2)}.$$

283. Определить вид и параметры обратной связи для электрогидравлической следящей системы, блок-схема которой приведена на рис. 167, а. На рис. 167, а обозначено: A и B — части гидрорегулятора, $ГУ$ — гидроусилитель, $ПД$ — приводной двигатель, $РМ$ — рабочий механизм, $УД$ — управляющий двигатель, $ЧЭ$ — чувствительный элемент (тахогенератор), P — редуктор. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e}{p(1 + T_d p)(1 + T_{гм} p)},$$

где K_e — добротность по ускорению, $T_d = 0,05$ сек — электромеханическая постоянная времени управляющего двигателя, $T_{гм} = 0,02$ сек — гидромеханическая постоянная времени гидрорегулятора. Система должна иметь добротность по ускорению $K_e \geq 25 \text{ сек}^{-2}$ и показатель колебательности $M \leq 1,8$. Обратная связь охватывает управляющий двигатель и усилитель.

Решение. На рис. 168 построена л. а. х. исходной системы L_n при значении $K_e = 25 \text{ сек}^{-2}$. Там же построена желаемая л. а. х. $L_{ж}$, отвечающая всем требованиям качества, предъявляемым к системе.

Рассмотрим порядок определения вида и параметров обратной связи.

С учетом дополнительной обратной связи передаточную функцию разомкнутой системы $W_{\text{ж}}(p)$ можно записать в виде

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{W(p)}{1 + W_{\text{х}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)},$$

где $W_{\text{ос}}(p)$ — передаточная функция цепи дополнительной обратной связи, $W_{\text{х}}(p)$ — передаточная функция

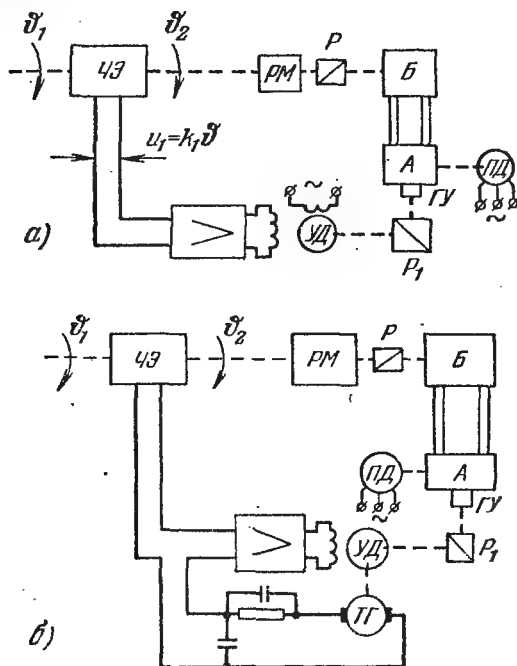


Рис. 167. Схемы электрогидравлической следящей системы.

части системы, замыкаемой обратной связью. Из приведенного выражения следует, что л. а. х. цепи обратной связи $L_{\text{ос}}$ можно определить по известным л. а. х. $L_{\text{ж}}$ и $L_{\text{и}}$ в следующей последовательности [4], [28]:

В решаемой задаче разностная л. а. х. L_1 будет полностью располагаться под осью нуля децибел, что вызовет нарушение условия минимальности фазы при переходе к л. а. х. L_2 [4]. Поэтому прежде следует увеличить коэффициент усиления исходной системы настолько, чтобы разностная л. а. х. L_1 полностью лежала выше оси нуля децибел.

На рис. 168 построена л. а. х. исходной системы с увеличенным коэффициентом усиления $K'_e = \omega'_0 = 3600 \text{ сек}^{-2}$, которая обозначена L_p . Там же изображена разностная л. а. х. L_1 , полученная вычислением желаемой л. а. х. $L_{ж}$ из располагаемой л. а. х. L_p . Для определения л. а. х. L_2 обратимся к таблице преобразования л. а. х. (приложение 25, п. VII).

Поскольку обратная связь охватывает управляющий двигатель и усилитель, то

$$W_x(p) = \frac{k_x}{p(1 + T_{дp})}.$$

Соответствующая этому выражению л. а. х. L_x построена на рис. 168.

Вычитая из ординат л. а. х. L_2 ординаты л. а. х. L_x , строим искомую л. а. х. L_{oc} , по виду которой может быть записано выражение для передаточной функции цепи обратной связи

$$W_{oc}(p) = \frac{k_{oc} p (1 + T_3 p)}{1 + T_2 p},$$

где

$$k_{oc} = \frac{1}{\omega_{oc}}, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2}, \quad T_3 = \frac{1}{\omega_3}.$$

Полученную передаточную функцию можно легко реализовать, включив в цепь обратной связи тахогенератор и пассивное звено указанного типа (рис. 167, б).

284. Определить вид обратной связи для системы, рассмотренной в задаче 283, в предположении, что цепь обратной связи охватывает часть усилителя, т. е. $W_x(p) = k_x$. Остальные данные те же, что в предыдущей задаче.

Ответ. Передаточная функция цепи обратной связи имеет вид

$$W_{oc}(p) = \frac{k_{oc} (1 + T_3 p)}{(1 + T_2 p) (1 + T_m p)}.$$

285. Произвести выбор параметров прямой параллельной корректирующей связи для системы автоматического регулирования, структурная схема которой

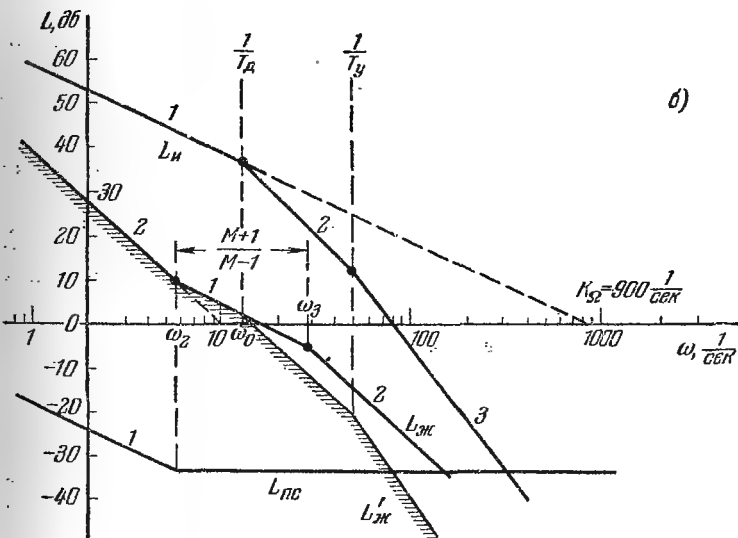
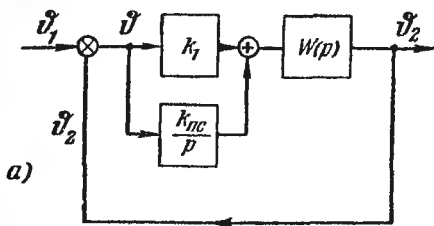


Рис. 169. а) Структурная схема системы с введением прямой параллельной корректирующей связи; б) л. а. х. к задаче 285.

показана на рис. 169, а. Передаточная функция разомкнутой исходной системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1 + T_y p)(1 + T_d p)},$$

где $K_{\Omega} = 900 \text{ сек}^{-1}$, $T_d = 0,08 \text{ сек}$, $T_y = 0,02 \text{ сек}$. После введения прямой параллельной связи система должна обладать астатизмом второго порядка, иметь добротность по ускорению $K_e = 100 \text{ сек}^{-2}$ и показатель колебательности $M \leq 1,5$.

Решение. Передаточную функцию разомкнутой системы с учетом введения прямой параллельной связи представим в виде

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{K_e \left(1 + \frac{k_1}{k_{\text{пс}}} p\right)}{p^2 (1 + T_d p) (1 + T_y p)},$$

где

$$K_e = K_{\Omega} k_{\text{пс}}.$$

Реализация прямой связи, осуществляющей введение сигнала, пропорционального интегралу от ошибки (рассогласования), возможна путем использования интегрирующего привода.

На рис. 169, б изображены л. а. х. исходной системы $L_{\text{и}}$, желаемая л. а. х. $L_{\text{ж}}$ и л. а. х. прямой связи $L_{\text{пс}}$.

Требуемое значение коэффициента передачи по цепи прямой связи $k_{\text{пс}}$ определяется из условия

$$K_e = \omega_0^2 = K_{\Omega} k_{\text{пс}}$$

или

$$k_{\text{пс}} = \frac{K_e}{K_{\Omega}} = \frac{100}{900} = 0,11 \text{ сек}^{-1}.$$

Отношение $\frac{k_1}{k_{\text{пс}}}$ целесообразно выбрать равным $\frac{1}{\omega_2}$. Отсюда

$$k_1 = \frac{k_{\text{пс}}}{\omega_2} = \frac{0,11}{6} \approx 0,018.$$

Для выполнения этого условия придется намеренно уменьшать коэффициент передачи первого звена, охватываемого прямой параллельной связью. Одновременно во столько же раз увеличивается коэффициент передачи другого звена, входящего в прямой тракт усиления, чтобы сохранить постоянной величину K_{Ω} .

Введением интегрирующей связи удастся приблизить л. а. х. исходной системы $L_{\text{и}}$ к желаемому виду $L_{\text{ж}}$ только в области низких и частично средних частот ($L_{\text{ж}}$).

Окончательное приближение л. а. х. системы к желаемому виду может быть достигнуто путем коррекции л. а. х. системы в области средних и высших частот применением последовательных корректирующих звеньев либо с помощью эквивалентных им прямых или обратных связей.

§ 6.5. Расчет систем комбинированного управления

286. Определить требуемый уровень компенсирующего сигнала по первой производной от входного воздействия, при котором устраняется скоростная ошибка системы

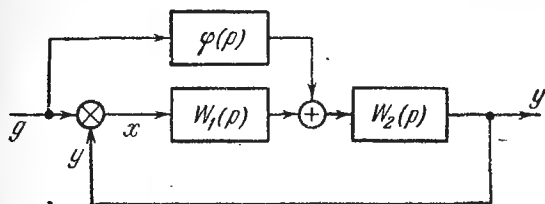


Рис. 170. Структурная схема системы комбинированного управления.

(рис. 170), звенья которой имеют следующие передаточные функции:

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \tau_1 p, \\ W_1(p) &= k_1, \\ W_2(p) &= \frac{k_2}{p(1 + Tp)},\end{aligned}$$

где $k_1 = 10$ в/град, $k_2 = 10$ град/сек, $T = 0,02$ сек, τ [сек] — коэффициент, определяющий уровень компенсирующего сигнала.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки имеет вид

$$\Phi_x(p) = \frac{1 - W_2(p)\varphi(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}, \quad (1)$$

откуда

$$\Phi_x(p) = \frac{Tp^2 + p - k_2\tau p}{Tp^2 + p + k_1k_2}. \quad (2)$$

Условие устранения скоростной ошибки

$$k_2\tau = 1.$$

Следовательно, требуемый уровень компенсирующего сигнала равен

$$\tau = \frac{1}{k_2} = 0,1 \frac{\text{в сек}}{\text{град}}.$$

287. Определить требуемые уровни компенсирующих сигналов по первой и второй производным от входного воздействия для следящей системы комбинированного управления (см. рис. 170) с передаточными функциями:

$$\varphi(p) = \tau_1 p + \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{1 + \tau_3 p},$$

$$W_1(p) = 1,$$

$$W_2(p) = \frac{K_\Omega}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,002 \text{ сек}$. Система должна обеспечивать слежение с ошибкой $x_{\max} \leq 0,1$ при максимальной скорости слежения $\Omega_{\max} = 150^\circ \text{ сек}^{-1}$ и максимальном ускорении $\epsilon_{\max} = 750 \text{ град/сек}^2$. Показатель колебательности $M \leq 1,5$.

Решение. На рис. 171 построена контрольная точка с координатами

$$\omega_k = \frac{\epsilon}{\Omega} = 5 \text{ сек}^{-1}$$

и

$$L_k = 20 \lg \frac{\Omega_{\max}^2}{x_{\max} \epsilon_{\max}} = 20 \lg \frac{150^2}{0,1 \cdot 750} \approx 50 \text{ дб}.$$

Если провести через эту контрольную точку низкочастотную асимптоту л. а. х., соответствующей передаточной функции исходной системы, то требуемое значение добротности по скорости составит

$$K_\Omega = \frac{\Omega_{\max}}{x_{\max}} = \frac{150}{0,1} = 1500 \text{ сек}^{-1}.$$

Однако известно, что при заданном значении показателя колебательности M наименьшее допустимое значение добротности по скорости при отсутствии каких-либо

корректирующих средств составит [4]

$$K_{\Omega} = \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2(T_1 + T_2)} = \frac{1,5^2 + 1,5 \sqrt{1,5^2 - 1}}{2(0,05 + 0,02)} = 40 \text{ сек}^{-1}.$$

Если ввести сигнал первой производной от управляющего воздействия, следящая система приобретает свойства системы с астатизмом второго порядка.

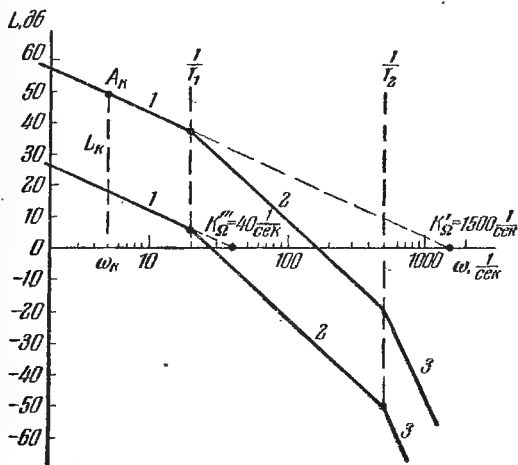


Рис. 171. Л. а. х. к задаче 287.

Требуемое значение добротности по ускорению равно

$$K_{\epsilon} = \frac{\epsilon_{\max}}{x_{\max}} = \frac{750}{0,1} = 7500 \text{ сек}^{-2}.$$

Требуемое значение добротности по скорости при этом для исходной системы определяется по формуле

$$K''_{\Omega} = (T_1 + T_2) K_{\epsilon} = 0,052 \cdot 7500 = 390 \text{ сек}^{-1},$$

т. е. K''_{Ω} получается уже значительно меньше, чем K'_{Ω} . При введении дополнительно второй производной требуемая добротность по третьей производной

$$K_{\gamma} = \frac{\omega_K \epsilon_{\max}}{x_{\max}} = \frac{5 \cdot 750}{0,1} = 37500 \text{ сек}^{-3}.$$

Требуемая добротность по скорости может быть определена по выражению

$$K_{\Omega}''' = [T_1 T_2 + \tau_3 (T_1 + T_2)] K_{\gamma}.$$

Приравняв K_{Ω}''' добротности по скорости, которую можно иметь без корректирующих средств ($K_{\Omega} = 40 \text{ сек}^{-1}$), получим требуемое значение постоянной времени τ_3 :

$$\tau_3 = \frac{K_{\Omega} - T_1 T_2 K_{\gamma}}{(T_1 + T_2) K_{\gamma}} = \frac{40 - 0,05 \cdot 0,002 \cdot 37500}{(0,05 + 0,002) \cdot 37500} = 18,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

Постоянные времени, определяющие уровни вводимых сигналов, находятся из условий компенсации

$$\tau = \frac{1}{K_{\Omega}} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ сек},$$

$$\tau_2 = T_1 + T_2 + \tau_3 = 0,05 + 0,002 + 0,018 = 0,070 \text{ сек.}$$

Таким образом, передаточная функция компенсирующей цепи должна иметь вид

$$\Phi(p) = 0,025p + \frac{0,025 \cdot 0,070p^2}{1 + 0,0018p}.$$

Л. а. х. системы, соответствующая найденным параметрам, показана на рис. 171 (нижняя л. а. х.).

288. Определить требуемый уровень компенсирующего сигнала, пропорционального первой производной от входного воздействия,

$$\Phi(p) = \tau_1 p,$$

и произвести расчет других необходимых корректирующих средств для следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (см. рис. 170)

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1 + T_d p)(1 + T_y p)}, \quad W_1(p) = 1,$$

где $T_d = 0,1 \text{ сек}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя, $T_y = 0,05 \text{ сек}$ — постоянная времени усилителя. Система должна обладать астатизмом вто-

рого порядка и обеспечивать слежение с ошибкой $\vartheta_{\max} \leq 2$ угл. мин при максимальной скорости слежения $\dot{\Omega}_{\max} = 30$ град/сек и максимальном ускорении $\ddot{\epsilon}_{\max} = 30$ град/сек². Запас устойчивости определяется показателем колебательности $M \leq 1,5$.

Решение. Определим вначале желаемую эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы.

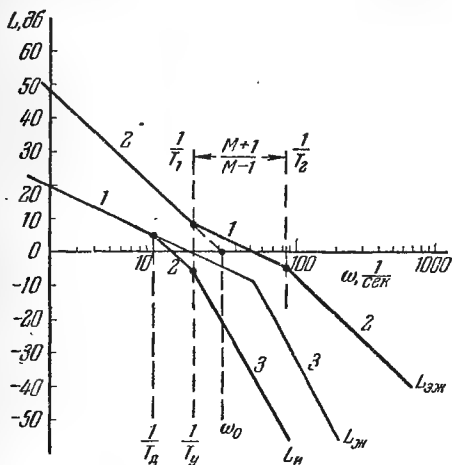


Рис. 172. Л. а. х. к задаче 288.

Первая асимптота л. а. х. представляет собой прямую с наклоном 40 дБ/дек. Положение ее определяется базовой частотой (рис. 172)

$$\omega_0 = \sqrt{K_e} = \sqrt{\frac{\epsilon_{\max}}{\vartheta_{\max}}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 60}{2}} = 30 \text{ сек}^{-1}.$$

Для получения запаса устойчивости, соответствующего показателю колебательности M , передаточная функция для области средних частот должна иметь вид [4]

$$W_{\text{эж}}(p) = \frac{\omega_0^2 (1 + T_1 p)}{p^2 (1 + T_2 p)},$$

где

$$\omega_0^2 = K_\varepsilon = 900 \text{ сек}^{-2},$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{30} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,0575 \text{ сек},$$

$$T_2 = \frac{M-1}{M+1} T_1 = \frac{1,5-1}{1,5+1} 0,0575 = 0,0115 \text{ сек}.$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi_{\text{ж}}(p) = \frac{W_{\text{эж}}(p)}{1 + W_{\text{эж}}(p)} = \frac{K_\varepsilon (1 + T_1 p)}{K_\varepsilon + K_\varepsilon T_1 p + p^2 + T_2 p^3}.$$

При введении компенсирующего сигнала передаточную функцию замкнутой системы можно представить в виде

$$\Phi_{\text{ж}}(p) = \frac{W_{\text{эж}}(p)}{1 + W_{\text{эж}}(p)} = \frac{W_{\text{эж}}(p) [1 + \varphi(p)]}{1 + W_{\text{ж}}(p)} = \Phi_1(p) + \Phi_2(p).$$

Сравнение приведенных выражений дает

$$q(p) = \tau_1 p = T_1 p,$$

или

$$\tau_1 = T_1 = 0,0575 \text{ сек},$$

что определяет требуемый уровень компенсирующего сигнала. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ж}}(p) &= \frac{K_\varepsilon}{K_\varepsilon + K_\varepsilon T_1 p + p^2 + T_2 p^3} + \frac{K_\varepsilon T_1 p}{K_\varepsilon + K_\varepsilon T_1 p + p^2 + T_2 p^3} = \\ &= \Phi_1(p) + \Phi_2(p). \end{aligned}$$

Желаемая передаточная функция исходной следящей системы равна

$$\begin{aligned} W_{\text{ж}}(p) &= \frac{\Phi_1(p)}{1 - \Phi_1(p)} = \frac{\frac{1}{T_1}}{p \left(1 + \frac{1}{K_\varepsilon T_1} p + \frac{T_2}{K_\varepsilon T_1} p^2 \right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{T_1}}{p (1 + ap + bp^2)} = \frac{17,4}{p (1 + 0,0193p + 0,00022p^2)}. \end{aligned}$$

Передаточная функция нескорректированной системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p (1 + T_d p) (1 + T_y p)} = \frac{K_\Omega}{p [1 + (T_d + T_y) p + T_d T_y p^2]}.$$

Сравнение двух последних выражений показывает, что для получения равенства $W_{\text{зк}}(p) = W(p)$ необходимо выполнение следующих условий:

$$K_{\Omega} = 17,4 \text{ сек}^{-1},$$

$$T_d + T_y = 0,0193 \text{ сек},$$

$$T_d T_y = 0,00022 \text{ сек}^2.$$

Выполнение первого условия не представляет трудностей, так как добротность по скорости K_{Ω} , представляющая собой общий коэффициент передачи разомкнутой системы, может быть принята любой. Выполнение второго и третьего условий требует введения корректирующих звеньев, снижающих коэффициенты при p и p^2 в квадратной скобке выражения для $W(p)$, так как без корректирующих звеньев

$$T_d + T_y = 0,15 \text{ сек} \quad \text{и} \quad T_d T_y = 0,005 \text{ сек}^2.$$

Это может быть сделано введением жестких обратных связей, охватывающих усилитель и усилитель совместно

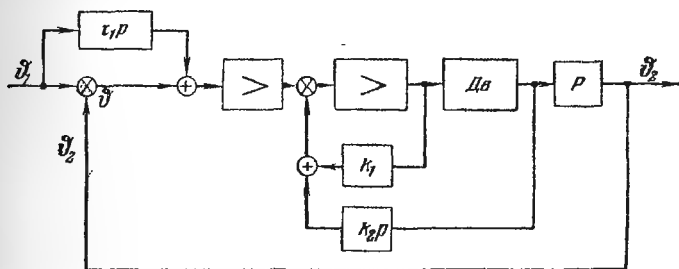


Рис. 173. Структурная схема системы к задаче 288.

с двигателем (рис. 173). В этом случае передаточная функция разомкнутой цепи вместе с обратными связями будет равна

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\Omega}}{p \left[1 + \left(\frac{T_d + T_y + k_1 T_d}{1 + k_1 + k_2} \right) p + \frac{T_d T_y}{1 + k_1 + k_2} p^2 \right]}.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением для $W_{\text{ж}}(p)$, получаем

$$\frac{T_d + T_y + k_1 T_d}{1 + k_1 + k_2} = a = 0,0193 \text{ сек},$$

$$\frac{T_d T_y}{1 + k_1 + k_2} = 0,00022 \text{ сек}^2,$$

откуда находим требуемые коэффициенты усиления по первой и второй петлям обратных связей (см. рис. 173)

$$k_1 = 1,9 \quad k_2 = 22,5.$$

§ 6.6. Расчет последовательных корректирующих контуров, работающих на несущей частоте

289. Выбрать схему и параметры звена переменного тока, л. а. х. которого по огибающей соответствует

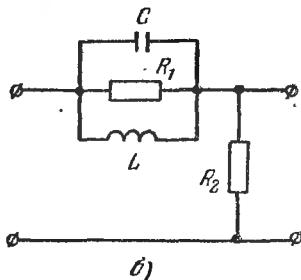
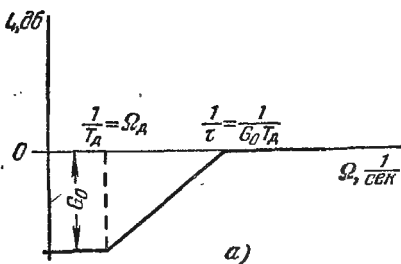


Рис. 174. а) Л. а. х. реального дифференцирующего звена; б) схема резонансного RLC -звена.

дифференцирующему звену (рис. 174, а) с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{T_2(1 + T_1 p)}{T_1(1 + T_2 p)},$$

где $T_1 = 0,08 \text{ сек}$, $T_2 = 0,01 \text{ сек}$. Несущая частота ω_n равна 3140 сек^{-1} .

Решение. Передаточную функцию реального дифференцирующего звена переменного тока по отношению к частоте огибающей Ω можно для достаточно узкой полосы частот Ω записать в виде

$$W(j\Omega) = G_0 \frac{1 + j\Omega T_d}{1 + j\Omega T_d G_0} = G_0 \frac{1 + j\Omega T_d}{1 + j\Omega \tau}.$$

По условию задачи $G_0 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{0,01}{0,08} = 0,125$ и $T_d = = T_1 = 0,08$ сек.

В настоящее время получили распространение следующие виды дифференцирующих звеньев: а) двойные или параллельные T -образные RC -звенья; б) мостовые T -образные RC -звенья; в) мостовые RC - и LC -звенья; г) резонансные RLC -звенья.

Рассмотрим возможность применения резонансного RLC -звена (рис. 174, б). Передаточная функция такого звена по огибающей имеет вид

$$W(j\Omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\Omega 2R_1C}{1 + j\Omega 2R_1C \frac{R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Для нашего случая

$$2R_1C = T_d, \quad 2R_1C \frac{R_2}{R_1 + R_2} = T_d G_0,$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = G_0 \quad \text{и} \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LL}}.$$

Таким образом, получаем четыре уравнения с четырьмя неизвестными:

$$0,08 = 2R_1C, \quad 0,01 = 2R_1C \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$0,125 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad 3140 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Величина сопротивления R_2 обычно бывает задана (равна входному сопротивлению последующего устройства). Пусть R_2 равняется 100 ком. Определим R_1 :

$$0,125R_1 + 0,125 \cdot 100 = 100,$$

$$R_1 = \frac{87,5}{0,125} = 700 \text{ ком.}$$

Определим теперь емкость конденсатора C :

$$C = \frac{0,08}{2R_1} = \frac{0,08}{2 \cdot 0,7} = 0,057 \text{ мкф.}$$

В заключение найдем индуктивность L :

$$L = \frac{1}{\omega_n^2 C} = \frac{10^6}{3140^2 \cdot 0,057} = 1,8 \text{ гн.}$$

290. Определить параметры двойного T -образного звена (рис. 175), работающего на несущей частоте $\omega_n = 2\pi f_n = 314 \text{ сек}^{-1}$. Остальные условия те же, что в предыдущей задаче.

Решение. Для определения параметров звена обратимся к таблице, приведенной в приложении 22.

По условию задачи произведение $T_d \omega_n = 25$. Путем интерполирования данных можно найти G_0 , соответствующее полученному произведению $T_d \omega_n$. Коэффициент G_0 , определенный таким образом, оказывается равным 0,02. Таким образом, полученное значение G_0 по сравнению с его заданным значением можно уменьшить. Это в свою очередь при сохранении $T_1 = T_d = 0,08 \text{ сек}$ может привести к уменьшению постоянной времени T_2 до значения

$$T_2 = T_1 G_0 =$$

$$= 0,08 \cdot 0,02 = 0,0016 \text{ сек.}$$

Рис. 175. Схема двойного T -образного RC -звена.

Обычно уменьшение постоянной времени T_2 не связано с ухудшением динамических свойств корректируемой системы.

Перейдем к определению параметров двойного T -образного звена. Пусть $C_1 = C_2 = C_3 = C = 0,5 \text{ мкф}$. Тогда (см. приложение 22)

$$R_1 = \frac{\alpha}{\omega_n C} = \frac{0,394 \cdot 10^6}{314 \cdot 0,5} \approx 2500 \text{ ом},$$

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_n C \alpha} = \frac{10^6}{2 \cdot 314 \cdot 0,5 \cdot 0,394} \approx 8000 \text{ ом},$$

$$R_3 = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_n C} = \frac{10^6}{1,41 \cdot 314 \cdot 0,5} \approx 4500 \text{ ом}.$$

291. Определить параметры двойного T -образного звена. Постоянная времени $T_d = 0,0047 \text{ сек}$. Несущая частота $\omega_n = 2\pi f_n = 3140 \text{ сек}^{-1}$, $C_1 = C_2 = C = 1 \text{ мкф}$.

Ответ. $G_0 = 0,034$, $R_1 = 134 \text{ ом}$, $R_2 = 380 \text{ ом}$, $R_3 = 225 \text{ ом}$.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 7.1. Вычисление корреляционных функций и спектральных плотностей

292. Определить корреляционную функцию $R(\tau)$ и спектральную плотность $S(\omega)$ для величины, изменяющейся по гармоническому закону

$$x = A \sin(\beta t + \psi).$$

Проверить, что интегрирование спектральной плотности по всем частотам, а также значение $R(0)$ дают средний квадрат (в данном случае он равен дисперсии) рассматриваемой величины. Амплитуда $A = 10$ и угловая частота $\beta = 2 \text{ сек}^{-1}$.

Решение. Корреляционная функция

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t + \tau) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \sin(\beta t + \psi) \sin(\beta t + \beta\tau + \psi) dt = \frac{A^2}{2} \cos \beta\tau, \end{aligned}$$

где $T_0 = \frac{2\pi}{\beta}$. Подстановка исходных данных дает $R(\tau) = 50 \cos 2\tau$, а также $R(0) = 50$.

Спектральная плотность может быть вычислена на основе интеграла Фурье [2]:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} e^{-j\omega\tau} \cos \beta\tau d\tau = \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau \cos \beta\tau d\tau = \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega - \beta)\tau + \cos(\omega + \beta)\tau] d\tau = \\ &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \beta) + \delta(\omega + \beta)], \end{aligned}$$

где $\delta(\omega - \beta)$ и $\delta(\omega + \beta)$ — единичные импульсные функции, расположенные при частотах $\omega = \beta$ и $\omega = -\beta$.

Интегрирование спектральной плотности по всем частотам дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega - \beta) + \delta(\omega + \beta)] d\omega.$$

Интегралы от единичных импульсных функций равны единице,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \beta) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + \beta) d\omega = 1.$$

Поэтому в результате получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \frac{A^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50.$$

293. Для стационарного случайного процесса, имеющего постоянный спектр в полосе от $-\omega_n$ до $+\omega_n$ (рис. 176), вычислить среднее значение (математическое ожидание), средний квадрат (момент второго порядка) и дисперсию, а также найти аналитическое выражение и построить график корреляционной функции.

Решение. Среднее значение случайной величины равно нулю $\bar{x} = 0$, так как спектральная плотность не содержит при $\omega = 0$ особенностей типа импульсной функции (дельта-функции). В результате дисперсия равна среднему квадрату случайной величины

$$D = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} = \sigma^2,$$

где σ — среднеквадратичное отклонение. Далее находим

$$\overline{x^2} = D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\Pi}}^{+\omega_{\Pi}} N d\omega = \frac{N \Delta\omega}{2\pi},$$

где $\Delta\omega = 2\omega_{\Pi}$ — полоса частот (в радианах в секунду). Последняя формула может быть записана также в следующем виде:

$$\overline{x^2} = D = N \Delta f,$$

где $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ — полоса частот (в герцах). Среднеквадратичное значение случайной величины

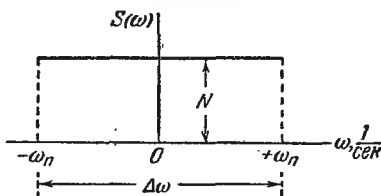


Рис. 176. Белый спектр в ограниченной полосе частот.

$$x_{\text{ск}} = \sigma = \sqrt{N} \sqrt{\Delta f}.$$

Корреляционная функция может быть определена на основе интеграла Фурье [2]:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

или

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\Pi}} N \cos \omega\tau d\omega = \frac{N}{\pi\tau} \sin \omega_{\Pi}\tau.$$

График корреляционной функции изображен на рис. 177. Значение корреляционной функции при $\tau = 0$ равно

$$R(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N}{\pi\tau} \sin \omega_{\Pi}\tau = \frac{N\omega_{\Pi}}{\pi} = D.$$

294. Для предыдущей задачи определить нормированное значение спектральной плотности и корреляционной функции.

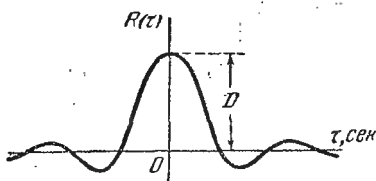


Рис. 177. Корреляционная функция к задаче 293.

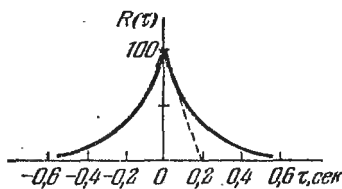


Рис. 178. Корреляционная функция экспоненциального вида.

Ответ. Нормированная спектральная плотность при $-\omega_n \leq \omega \leq \omega_n$ равна

$$\sigma(\omega) = \frac{S(\omega)}{D} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta f}.$$

Нормированная корреляционная функция

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{D} = \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau}.$$

Значение $\rho(\tau)$ при $\tau = 0$

$$\rho(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} = 1.$$

295. В результате обработки осциллограммы стационарного случайного процесса с математическим ожиданием (средним значением), равным нулю, получено выражение для корреляционной функции

$$R(\tau) = D e^{-\mu |\tau|},$$

где $D = 100$ — дисперсия и $\mu = 5 \text{ сек}^{-1}$ — параметр затухания. Корреляционная функция построена на рис. 178. Определить спектральную плотность и построить ее график.

Решение. Спектральная плотность может быть найдена согласно интегралу Фурье [2]

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} D e^{-\mu |\tau|} e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Последний интеграл для удобства желательно разбить на два:

$$S(\omega) = D \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\mu - j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\mu + j\omega)\tau} d\tau \right] = \\ = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} = \frac{2TD}{1 + \omega^2 T^2},$$

где

$$T = \frac{1}{\mu} = 0,2 \text{ сек.}$$

Подстановка численных значений дает

$$S(\omega) = \frac{40}{1 + 0,04\omega^2}.$$

Спектральная плотность построена на рис. 179.

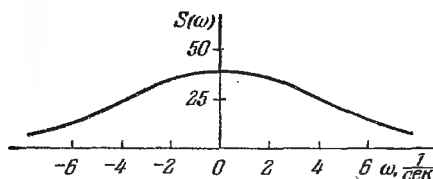


Рис. 179. Спектральная плотность, соответствующая корреляционной функции на рис. 178.

296. Решить предыдущую задачу, если рассматриваемый стационарный случайный процесс имеет среднее значение (математическое ожидание) $\bar{x} = 5$. Построить графики корреляционной функции и спектральной плотности.

Ответ. Средний квадрат случайной величины

$$\overline{x^2} = D + \bar{x}^2 = 100 + 5^2 = 125.$$

Корреляционная функция

$$R(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} + \bar{x}^2 = 100 e^{-5|\tau|} + 25.$$

Спектральная плотность

$$S(\omega) = 2\pi\bar{x}^2\delta(\omega) + \frac{2TD}{1 + \omega^2 T^2} = 157\delta(\omega) + \frac{40}{1 + 0,04\omega^2},$$

где $\delta(\omega)$ — единичная импульсная функция. Графики построены на рис. 180.

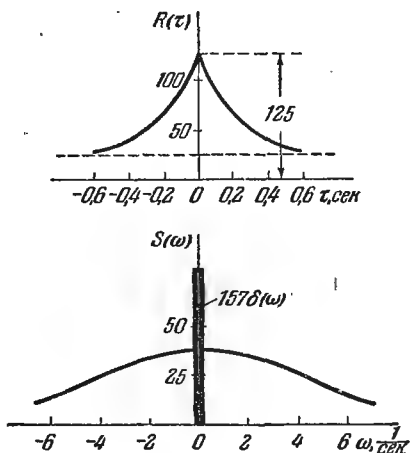


Рис. 180. Корреляционная функция и спектральная плотность к задаче 296.

297. В результате обработки осциллограммы случайного стационарного процесса с математическим ожиданием, равным нулю, получено выражение для корреляционной функции:

$$R(\tau) = De^{-\mu|\tau|} \cos \beta\tau, \quad (1)$$

где $D = 40$ — дисперсия, $\mu = 0,5 \text{ сек}^{-1}$ — параметр затухания (коэффициент нерегулярности) и $\beta = 2 \text{ сек}^{-1}$ — резонансная частота. Корреляционная функция изображена на рис. 181. Найти аналитическое выражение и построить график спектральной плотности.

Ответ. Спектральная плотность

$$S(\omega) = \mu D \left[\frac{1}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right].$$

После подстановки численных значений

$$S(\omega) = \frac{20}{0,25 + (2 - \omega)^2} + \frac{20}{0,25 + (2 + \omega)^2}.$$

График спектральной плотности изображен на рис. 182.

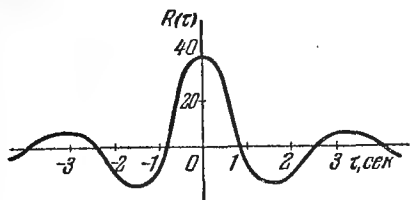


Рис. 181. Корреляционная функция нерегулярной качки.

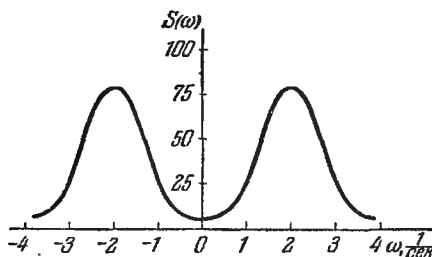


Рис. 182. Спектральная плотность нерегулярной качки.

298. Для аппроксимации формулы корреляционной функции по исходным данным предыдущей задачи принято более точное выражение

$$R(\tau) = D e^{-\mu |\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right).$$

Найти спектральную плотность для этого случая.

Ответ.

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{\mu}{\beta} D \left[\frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \\ &= 10 \left[\frac{4 - \omega}{0,25 + (2 - \omega)^2} + \frac{4 + \omega}{0,25 + (2 + \omega)^2} \right]. \end{aligned}$$

299. Стационарный случайный процесс на входе следящей системы имеет вид, представленный на рис. 183. Среднеквадратичное значение рассматриваемой величины $x_{\text{ск}} = 2$. Средняя протяженность участка $x = \text{const}$ составляет $T = 10$ сек. Определить корреляционную функцию и спектральную плотность.

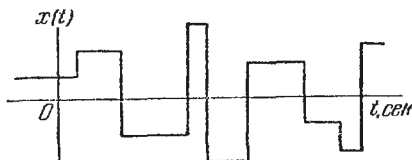


Рис. 183. Типовой входной сигнал следящей системы.

Решение. Корреляционная функция может быть найдена по выражению

$$R(\tau) = \overline{x^2}P_1 + \bar{x}^2P_2, \quad (1)$$

где $\overline{x^2}$ — средний квадрат, а $\bar{x}^2$ — квадрат среднего значения случайной величины, P_1 — вероятность нахождения перемножаемых ординат случайного процесса на интервале $x = \text{const}$, т. е. вероятность отсутствия изменения скорости на отрезке времени τ ; $P_2 = 1 - P_1$ — вероятность наличия изменения скорости на отрезке времени τ .

Так как для рассматриваемого процесса $\bar{x} = 0$, то $\overline{x^2} = D$ и формула (1) приобретает вид

$$R(\tau) = DP_1. \quad (2)$$

Вероятность появления изменения рассматриваемой случайной величины на малом интервале времени $\Delta\tau$ может быть принята пропорциональной значению $\Delta\tau$ и равной $\frac{\Delta\tau}{T}$. Вероятность отсутствия изменения случайной величины будет $1 - \frac{\Delta\tau}{T}$. Вероятность отсутствия изменения величины на отрезке времени τ равна произведению вероятностей

$$P' = \left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}}. \quad (3)$$

Искомая вероятность P_1 может быть найдена как предел выражения (3) при $\Delta\tau \rightarrow 0$:

$$P_1 = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}} = e^{-\frac{\tau}{T}}.$$

Так как $P_1(\tau) = P_1(-\tau)$, то в результате получаем корреляционную функцию в виде

$$R(\tau) = De^{-\frac{|\tau|}{T}} = 4e^{-0,1|\tau|}.$$

Спектральная плотность [2]

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2TD}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{80}{1 + 100\omega^2}.$$

300. Решить предыдущую задачу, если известно, что участки $x > 0$ и $x < 0$ чередуются и изменение

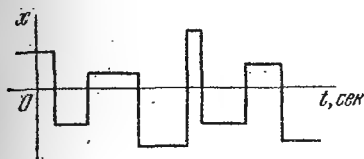


Рис. 184. График процесса к задаче 300.

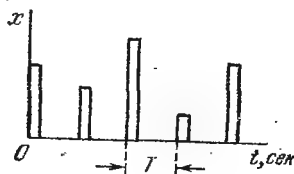


Рис. 185. Последовательность импульсов.

значения всегда сопровождается изменением знака. График такого процесса изображен на рис. 184.

Ответ.

$$R(\tau) = De^{-2\frac{|\tau|}{T}} = 4e^{-0,2|\tau|},$$

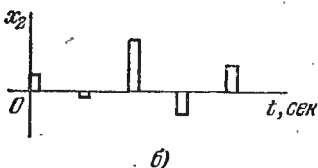
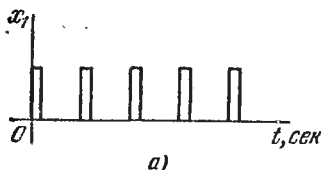
$$S(\omega) = \frac{TD}{1 + \frac{T^2}{4}\omega^2} = \frac{40}{1 + 25\omega^2}.$$

301. Определить спектральную плотность последовательности равноотстоящих положительных импульсов, имеющих одинаковую ширину и случайную амплитуду (рис. 185), при следующих исходных данных: период следования импульсов $T = 0,1$ сек; ширина импульса

$\gamma T = 0,01$ сек, что соответствует скважности $\gamma = 0,1$; среднее значение амплитуды импульса $\bar{x} = 20$; среднее квадратичное значение амплитуды импульса $\sqrt{\bar{x}^2} = x_{\text{ск}} = 25$.

Решение. Представим функцию $x(t)$ в виде суммы периодической составляющей $x_1(t)$, состоящей из последовательности импульсов с постоянной амплитудой, равной $\bar{x}$ (рис. 186, а), и случайной составляющей $x_2(t)$, состоящей из последовательности импульсов со случайной амплитудой и средним значением, равным нулю (рис. 186, б).

Периодическую составляющую разложим в ряд Фурье,



$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j \frac{2\pi k t}{T}}, \quad (1)$$

где C_k — комплексное число.

Амплитуды гармоник

$$\begin{aligned} A_k = A_{-k} &= |C_k| = \\ &= \left| \frac{\bar{x}}{k\pi} \sin k\pi\gamma \right|, \end{aligned} \quad (2)$$

Рис. 186. Составляющие последовательности импульсов.

что при подстановке исходных данных приводит к равенству

$$A_k = A_{-k} = \left| \frac{6,4}{k} \sin 0,314k \right|.$$

Это дает следующие значения амплитуд гармоник:

$$\begin{array}{lll} A_0 = 2, & A_6 = 1, & A_{12} = 0,31, \\ A_1 = 1,98, & A_7 = 0,73, & A_{13} = 0,39, \\ A_2 = 1,86, & A_8 = 0,46, & A_{14} = 0,43, \\ A_3 = 1,7, & A_9 = 0,21, & A_{15} = 0,42, \\ A_4 = 1,51, & A_{10} = 0, & A_{16} = 0,38, \\ A_5 = 1,27, & A_{11} = 0,17, & \text{и т. д.} \end{array}$$

Спектральная плотность для периодической составляющей (1) может быть записана в виде (см. задачу 292)

$$S_1(\omega) = 2\pi \frac{A_k^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (3)$$

и представляет собой линейчатый спектр. Он изображен на рис. 187, а, причем площадь импульсной функции, равная $2\pi \frac{A_k^2}{4}$, показана условно в виде амплитуды конечного по высоте импульса.

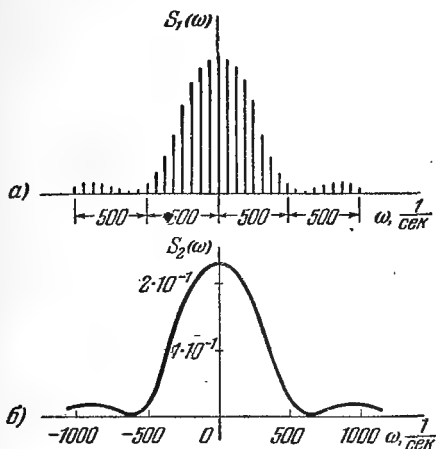


Рис. 187. Составляющие спектральной плотности к задаче 301.

Значение амплитуд гармоник (2) может быть также найдено на основе преобразования Фурье от одиночного импульса высотой $\bar{x}$ и продолжительностью γT . Изображение Фурье для такого импульса равно

$$F_1(j\omega) = \int_0^{\gamma T} \bar{x} e^{-j\omega t} dt = \bar{x} \frac{1 - e^{-j\omega \gamma T}}{j\omega}.$$

Модуль этого выражения

$$|F_1(j\omega)| = \left| \frac{2\bar{x} \sin \frac{\omega \gamma T}{2}}{\omega} \right|. \quad (4)$$

Амплитуда k -й гармоники может быть получена из формулы (4) для частоты ω_k подстановкой $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ и

делением полученного значения на период следования T :

$$A_k = \frac{\left| F\left(j \frac{2\pi k}{T}\right) \right|}{T} = \left| \frac{x}{k\pi} \sin k\pi\gamma \right|.$$

Это выражение совпадает с (2).

Спектральная плотность случайной составляющей может быть найдена из общего выражения для спектральной плотности случайной величины

$$S(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} |F(j\omega)|^2,$$

которое в рассматриваемом случае превращается в выражение

$$S_2(\omega) = \frac{1}{T} |F_2(j\omega)|^2,$$

где $F_2(j\omega)$ представляет собой изображение Фурье одиночного импульса, среднеквадратичное значение которого равно $\sigma = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2}$. Аналогично формуле (4) можно записать

$$|F_2(j\omega)| = \left| \frac{2\sigma \sin \frac{\omega\gamma T}{2}}{\omega} \right|. \quad (5)$$

Отсюда находим спектральную плотность случайной составляющей

$$S_2(\omega) = \frac{4\sigma^2 \sin^2 \frac{\omega\gamma T}{2}}{T\omega^2}. \quad (6)$$

Подстановка численных значений дает

$$S_2(\omega) = \frac{9000 \sin^2 0,005\omega}{\omega^2}.$$

Спектр является непрерывным. Он изображен на рис. 187, б. По своей форме он подобен огибающей линейчатого спектра, так как значения спектральной плотности также пропорциональны квадрату модуля изображения одиночного импульса (4).

302. Спектральная плотность скорости входного сигнала следящей системы (рис. 183) может быть

представлена в виде

$$S_1(\omega) = \frac{2TD_\Omega}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (1)$$

где $D_\Omega = \Omega_{\text{ск}}^2$ — средний квадрат скорости. Момент нагрузки на исполнительную ось постоянен по величине ($M = M_n = \text{const}$), а знак его меняется вместе с изменением знака скорости исполнительной оси. Считая приближенно, что знак момента меняется вместе со знаком входной скорости, определить корреляционную функцию для момента нагрузки $S_2(\omega)$, а также взаимные корреляционные функции для входной скорости и момента нагрузки $S_{12}(\omega)$ и $S_{21}(\omega)$. Считается, что входная скорость изменяется по закону с нормальным распределением.

Решение. Спектральная плотность момента нагрузки может быть получена из спектральной плотности скорости входного сигнала (1), если в ней заменить средний квадрат скорости на средний квадрат момента $M^2 = M_n^2$,

$$S_2(\omega) = \frac{2TM_n^2}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Взаимную спектральную плотность можно подсчитать по взаимной корреляционной функции, определяемой как среднее по времени или среднее по множеству

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \Omega(t + \tau) M(t) dt = \overline{\Omega(t + \tau) M(t)}.$$

Вероятность нахождения $\Omega(t + \tau)$ и $M(t)$ в одном интервале (см. задачу 299) равна

$$P_1 = e^{-\frac{|\tau|}{T}},$$

а вероятность нахождения в разных интервалах

$$P_2 = 1 - P = 1 - e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

При нахождении скорости и момента в разных интервалах среднее от их произведения равно нулю.

При нахождении Ω и M в одном интервале знак момента равен знаку скорости. Произведение скорости на момент будет при этом всегда положительным. При этом, поскольку величина момента постоянна, момент можно вынести из-под знака осреднения:

$$\overline{\Omega(t+\tau)M(t)} = M_{\text{н}} \overline{\Omega(t+\tau)} = M_{\text{н}} \Omega_{\text{с}},$$

где $\Omega_{\text{с}}$ — среднее по модулю значение скорости. Для нормального распределения

$$\Omega_{\text{с}} = \Omega_{\text{ск}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,8 \Omega_{\text{ск}}.$$

Таким образом, имеем взаимную корреляционную функцию

$$R_{12}(\tau) = M_{\text{н}} \Omega_{\text{с}} P_1 = M_{\text{н}} \Omega_{\text{с}} e^{-\frac{|\tau|}{T}} = 0,8 M_{\text{н}} \Omega_{\text{ск}} e^{-\frac{|\tau|}{T}}. \quad (2)$$

Спектральная плотность находится, как изображение Фурье, из выражения (2):

$$S_{12}(\omega) = \frac{2TM_{\text{н}}\Omega_{\text{с}}}{1+\omega^2T^2} = \frac{1,6TM_{\text{н}}\Omega_{\text{ск}}}{1+\omega^2T^2}. \quad (3)$$

Аналогичным образом можно найти, что $R_{21}(\tau) = R_{12}(\tau)$ и $S_{21}(\omega) = S_{12}(\omega)$.

§ 7.2. Прохождение случайного стационарного сигнала через линейную систему

303. Система слежения за звездами состоит из фотоэлемента, безынерционного усилителя, фильтра (апериодического звена первого порядка) и исполнительного устройства в виде гироскопа или тахометрического привода (идеального интегрирующего звена). Помеха на выходе фотоэлемента может быть принята в виде белого шума со спектральной плотностью $S(\omega) = N$. Показать, что среднеквадратичное значение случайной ошибки системы не зависит от постоянной времени фильтра.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)},$$

где $K [сек^{-1}]$ — добротность по скорости, T — постоянная времени фильтра.

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K}{Tp^2 + p + K}.$$

Спектральная плотность ошибки примет вид

$$S_{\theta}(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S(\omega) = \frac{K^2 N}{|T(j\omega)^2 + j\omega + K|^2}.$$

Интегрирование спектральной плотности ошибки по всем частотам (см. приложение 17) дает средний квадрат ошибки

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^2 N d\omega}{|T(j\omega)^2 + j\omega + K|^2} = \frac{KN}{2} = \Delta f N,$$

где эквивалентная полоса пропускания белого шума

$$\Delta f = \frac{K}{2} [гц].$$

Как видно из полученных выражений, среднеквадратичная ошибка не зависит от постоянной времени фильтра.

304. Для системы слежения за звездами (см. предыдущую задачу) среднеквадратичное напряжение шума фотоэлемента $U_{ск} = 6$ в в полосе частот $\Delta f = 10\,000$ гц (± 5000 гц). Крутизна характеристики фотоэлемента $k_{фэ} = 10$ мв/угл. мин. Определить допустимое значение общего коэффициента усиления (добротности по скорости K), при котором среднеквадратичное значение случайной ошибки не будет превышать 1 угл. мин.

Решение. Представим напряжение шумов фотоэлемента в виде эквивалентного среднеквадратичного углового сигнала на входе,

$$\theta_{ск} = \frac{U_{ск}}{k_{фэ}} = \frac{6}{10 \cdot 10^{-3}} = 600 \text{ угл. мин.}$$

Уровень белого шума на входе

$$S_{\pi}(\omega) = N = \frac{\theta_{ск}^2}{\Delta f} = \frac{600^2}{10000} = 36 \text{ (угл. мин)}^2/\text{гц}.$$

В задаче 303 было определено, что среднеквадратичное значение ошибки составляет

$$\sigma = \sqrt{\frac{KN}{2}}.$$

Отсюда находим значение общего коэффициента усиления

$$K \leq \frac{2\sigma^2}{N} = \frac{2 \cdot 1}{36} = 0,055 \text{ сек}^{-1}.$$

305. Даны передаточные функции разомкнутой системы регулирования с астатизмом первого порядка:

$$1) \quad W(p) = \frac{K}{p},$$

$$2) \quad W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)},$$

$$3) \quad W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Вычислить эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы, если добротность по скорости составляет $K = 10 \text{ сек}^{-1}$, а постоянные времени $T_1 = 0,1 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,05 \text{ сек}$.

Ответ.

$$1) \quad \Delta f = \frac{K}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ гц},$$

$$2) \quad \Delta f = \frac{K}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ гц},$$

$$3) \quad \Delta f = \frac{K}{2 \left(1 - \frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2}\right)} = \frac{10}{2 \left(1 - \frac{10 \cdot 0,1 \cdot 0,05}{0,1 + 0,05}\right)} = 7,5 \text{ гц}.$$

306. Даны передаточные функции разомкнутой системы регулирования с астатизмом второго порядка:

$$1) \quad W(p) = \frac{K(1+\tau p)}{p^2},$$

$$2) \quad W(p) = \frac{K(1+\tau p)}{p^2(1+Tp)}.$$

Вычислить эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы, если добротность по ускоре-

нию $K = 10 \text{ сек}^{-2}$, а постоянные времени $\tau = 1 \text{ сек}$ и $T = 0,5 \text{ сек}$.

Ответ.

$$1) \quad \Delta f = \frac{1 + K\tau^2}{2\tau} = \frac{1 + 10 \cdot 1^2}{2 \cdot 1} = 5,5 \text{ гц},$$

$$2) \quad \Delta f = \frac{1 + K\tau^2}{2(\tau - T)} = \frac{1 + 10 \cdot 1^2}{2(1 - 0,5)} = 11 \text{ гц}.$$

307. На входе системы регулирования действует помеха, имеющая спектральную плотность

$$S_n(\omega) = \frac{2T_n\sigma_n^2}{1 + \omega^2 T_n^2}.$$

Определить коэффициент сглаживания системы, равный отношению среднеквадратичного значения помехи на входе к среднеквадратичному значению ошибки.

$$K_{\text{сгл}} = \frac{\sigma_n}{\sigma},$$

и среднеквадратичное значение ошибки σ . Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p}.$$

Численные значения коэффициентов:

$$K = 0,5 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_n = 10, \quad T_n = 0,1 \text{ сек}.$$

• Ответ.

$$K_{\text{сгл}} = \sqrt{1 + \frac{1}{KT_n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{0,5 \cdot 0,1}} = \sqrt{21} = 4,6;$$

$$\sigma = \frac{\sigma_n}{K_{\text{сгл}}} = \frac{10}{4,6} = 2,18.$$

308. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)},$$

где $T_1 = 1 \text{ сек}$.

Ответ.

$$K_{\text{сгл}} = \sqrt{\frac{T_{\text{п}}}{T_1 + T_{\text{п}}} + \frac{1}{KT_{\text{п}}}} = \sqrt{\frac{0,1}{1 + 0,1} + \frac{1}{0,5 \cdot 0,1}} = \sqrt{20,1} = 4,5,$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{п}}}{K_{\text{сгл}}} = \frac{10}{4,5} = 2,22.$$

309. На входе следящей системы действует полезный сигнал, скорость которого изменяется в соответствии с рис. 183. Спектральная плотность, записанная для скорости, имеет вид

$$S_{\Omega}(\omega) = \frac{2TD_{\Omega}}{1 + \omega^2 T^2},$$

где $D_{\Omega} = \Omega_{\text{ск}}^2$ — дисперсия скорости. Среднеквадратичное значение скорости $\Omega_{\text{ск}} = 2$ град/сек. Среднее время продолжительности одного интервала $T = 1$ сек. Определить среднеквадратичную ошибку, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)}.$$

Добротность по скорости составляет $K = 25$ сек⁻¹, а постоянная времени $T = 0,05$ сек.

Решение. Передаточная функция относительно ошибки равна

$$\Phi_{\theta}(\omega) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p(1 + T_1 p)}{T_1 p^2 + p + K}.$$

Спектральная плотность ошибки

$$S_{\theta}(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 \frac{S_{\Omega}(\omega)}{\omega^2} = \frac{2TD_{\Omega}(1 + \omega^2 T_1^2)}{(1 + \omega^2 T^2) |T_1(j\omega)^2 + j\omega + K|^2}.$$

Приведем ее к виду, удобному для интегрирования (см. приложение 17),

$$S_{\theta}(\omega) = 2TD_{\Omega} \frac{-T_1^2(j\omega)^2 + 1}{|TT_1(j\omega)^3 + (T + T_1)(j\omega)^2 + (1 + KT)j\omega + K|^2}.$$

Интегрирование по всем частотам дает средний квадрат ошибки

$$\bar{\theta}^2 = 2TD_{\Omega} I_3,$$

где интеграл

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[-T_1^2(j\omega) + 1] d\omega}{|TT_1(j\omega)^3 + (T + T_1)(j\omega)^2 + (1 + KT)j\omega + K|^2},$$

в соответствии с приложением 17 равен

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)}.$$

Значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0 &= TT_1, & b_0 &= 0, \\ a_1 &= T + T_1, & b_1 &= -T_1^2, \\ a_2 &= 1 + KT, & b_2 &= 1, \\ a_3 &= K. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$I_3 = \frac{b_1 - \frac{a_1b_2}{a_3}}{2(a_0a_3 - a_1a_2)} = \frac{T + T_1 + KT_1^2}{2K(T + T_1 + KT^2)}.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ск}} &= \sqrt{\frac{TD_{\Omega}(T + T_1 + KT_1^2)}{K(T + T_1 + KT^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 \cdot 4(1 + 0,05 + 25 \cdot 0,05^2)}{25(1 + 0,05 + 25 \cdot 1^2)}} = \sqrt{0,0068} = 0^{\circ},082 \approx 5'. \end{aligned}$$

Приближенное выражение для среднеквадратичной ошибки имеет вид

$$\theta_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{TDT}{KKT^2}} = \frac{\Omega_{\text{ск}}}{K} = \frac{2}{25} = 0^{\circ},08 \approx 4',8.$$

310. На входе системы регулирования действует помеха с корреляционной функцией

$$R_{\Pi}(\tau) = D_{\Pi}e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$$

и спектральной плотностью

$$S_{\Pi}(\omega) = D_{\Pi} \frac{\mu}{\beta} \left[\frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\omega + \beta)^2} \right].$$

Численные значения коэффициентов:

$$D_{\Pi} = \sigma_{\Pi}^2 = 100, \quad \mu = 0,4 \text{ сек}^{-1} \quad \text{и} \quad \beta = 5 \text{ сек}^{-1}.$$

Определить коэффициент сглаживания, равный отношению среднеквадратичного значения помехи на входе к среднеквадратичной ошибке на выходе системы

$$K_{\text{сгл}} = \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma},$$

и среднеквадратичную ошибку σ . Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p},$$

где добротность системы по скорости $K = 0,1 \text{ сек}^{-1}$.

Ответ. Коэффициент сглаживания

$$\begin{aligned} K_{\text{сгл}} &= \frac{\beta^2 + \mu^2}{\beta K \sqrt{1 + \frac{2\mu(\beta^2 + \mu^2)}{\beta^2 K} - \frac{2\mu^2}{\beta^2}}} = \\ &= \frac{5^2 + 0,4^2}{5 \cdot 0,1 \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,4(5^2 + 0,4^2)}{5^2 \cdot 0,1} - \frac{2 \cdot 0,4^2}{5^2}}} = 16,7. \end{aligned}$$

Среднеквадратичная ошибка

$$\sigma = \frac{\sigma_{\Pi}}{K_{\text{сгл}}} = \frac{10}{16,7} = 0,6.$$

311. Для аппроксимации корреляционной функции предыдущей задачи используются две формулы:

$$R(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} \cos \beta \tau, \quad (1)$$

$$R(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right). \quad (2)$$

Этим корреляционным функциям соответствуют спектральные плотности:

для формулы (1)

$$S(\omega) = \mu D \left[\frac{1}{\mu^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\omega + \beta)^2} \right], \quad (3)$$

для формулы (2)

$$S(\omega) = \frac{\mu}{\beta} D \left[\frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\omega + \beta)^2} \right]. \quad (4)$$

Определить дисперсию скорости для формул (1) и (2).

Ответ. 1) $D_\Omega \rightarrow \infty$; 2) $D_\Omega = (\mu^2 + \beta^2) D$.

312. На вход системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{1 + Tp} \quad (1)$$

в момент времени $t = 0$ поступает случайный центрированный стационарный сигнал с корреляционной функцией

$$R_1(\tau) = D_1 e^{-\mu |\tau|}. \quad (2)$$

Определить изменение дисперсии выходной величины во времени $D_2(t)$, а также дисперсию выходной величины в установившемся режиме.

Исходные данные: $K = 10$, $T = 10$ сек, $D_1 = 1$ и $\mu = 0,05$ сек⁻¹.

Решение. Значение дисперсии на выходе может быть определено по формуле

$$D_2(t) = \int_0^t w(s) ds \int_0^t w(\eta) R_1(\eta - s) d\eta, \quad (3)$$

где $w(s)$ и $w(\eta)$ представляют собой функцию веса системы $w(t)$ при замене $t = s$ и $t = \eta$.

Для передаточной функции (1) функция веса будет $w(t) = \alpha K e^{-\alpha t}$, где $\alpha = T^{-1}$ (см. приложение 1). Следовательно,

$$D_2(t) = \frac{K^2 D_1}{T^2} \int_0^t e^{-\alpha s} ds \int_0^t e^{-\alpha \eta} e^{-\mu |\eta - s|} d\eta =$$

$$= \frac{K^2 D_1}{T^2} \int_0^t e^{-\alpha s} ds \left[\int_0^s e^{-\alpha \eta} e^{+\mu(\eta - s)} d\eta + \int_s^t e^{-\alpha \eta} e^{-\mu(\eta - s)} d\eta \right]. \quad (4)$$

Вычисление интегралов дает при $\alpha \neq \mu$

$$I_1 = \int_0^s e^{-\alpha\eta} e^{\mu(\eta-s)} d\eta = \frac{e^{-\alpha s} - e^{-\mu s}}{\mu - \alpha},$$

$$I_2 = \int_s^t e^{-\alpha\eta} e^{-\mu(\eta-s)} d\eta = \frac{e^{-\alpha s} - e^{\mu s} e^{-(\alpha+\mu)t}}{\alpha + \mu},$$

$$\begin{aligned} D_2(t) &= \frac{K^2 D}{T^2} \int_0^t e^{-\alpha s} (I_1 + I_2) ds = \\ &= K^2 D_1 \left[\frac{1}{1 + \mu T} + \frac{e^{-2\alpha t}}{1 - \mu T} - \frac{2e^{-(\alpha+\mu)t}}{1 - \mu^2 T^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В установившемся режиме

$$D_2(\infty) = \frac{K^2 D_1}{1 + \mu T}. \quad (6)$$

Формула (6) может быть получена также из спектральной плотности входного сигнала

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} D_1 e^{-\mu|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2\mu D_1}{\mu^2 + \omega^2}.$$

Спектральная плотность выходного сигнала

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega) = \frac{K^2 2\mu D_1}{|1 + j\omega T| (\mu + j\omega)^2}.$$

Интегрирование спектральной плотности $S_2(\omega)$ по всем частотам дает

$$D_2(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2K^2 \mu D_1 d\omega}{|T(j\omega)^2 + (1 + \mu T)j\omega + \mu|^2}.$$

В соответствии с приложением 17 получаем

$$D_2(\infty) = \frac{K^2 D_1}{1 + \mu T}.$$

При подстановке числовых значений получаем

$$\begin{aligned} D_2(t) &= 66 + 200e^{-0,2t} - 266e^{-0,15t}, \\ D_2(\infty) &= 66. \end{aligned}$$

313. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция системы соответствует идеальному интегрирующему звену с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K_1}{p},$$

где $K_1 = 0,1 \text{ сек}^{-1}$.

Ответ.

$$D_2(t) = 2K_1^2 D_1 \left[\frac{t}{\mu} - \frac{(1 - e^{-\mu t})}{\mu^2} \right] = 0,4t - 8(1 - e^{-0,05t}),$$

$$D_2(\infty) \rightarrow \infty.$$

§ 7.3. Оптимальные системы

314. Передаточная функция разомкнутой системы регулирования имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p^2},$$

где $K = 100 \text{ сек}^{-2}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи, а τ — постоянная времени корректирующего устройства. На входе системы действует полезный регулярный сигнал вида $g = at + \frac{bt^2}{2}$, где $a = 100 \text{ град/сек}$ и $b = 10 \text{ град/сек}^2$, и помеха, представляющая собой белый шум со спектральной плотностью $S_{\Pi}(\omega) = N = 0,2 \text{ град}^2/\text{гц}$. Определить значение постоянной времени корректирующего устройства, соответствующее минимуму среднеквадратичной ошибки в установившемся режиме, а также значение среднеквадратичной ошибки.

Решение. Установившееся значение ошибки от полезного сигнала

$$x_c = c_1 \dot{g} + \frac{c_2}{2} \ddot{g} = c_1(a + bt) + \frac{c_2}{2} b,$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты ошибки. На основании разложения передаточной функции относительно ошибки

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p^2}{p^2 + K\tau p + K}$$

в степенной ряд имеем $c_1 = 0$ и $\frac{c_2}{2} = \frac{1}{K}$. В результате регулярная составляющая ошибки

$$x_c = \frac{b}{K}$$

или

$$x_c^2 = \frac{b^2}{K^2}. \quad (1)$$

Средний квадрат случайной ошибки (см. приложение 17) равен

$$\begin{aligned} \overline{x_n^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(j\omega)|^2 N d\omega = \\ &= \frac{K^2 N}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[1 - \tau^2(j\omega) + 1] d\omega}{|(j\omega)^2 + K\tau j\omega + K|^2} = \frac{(1 + K\tau^2) N}{2\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

а средний квадрат суммарной ошибки

$$\overline{x^2} = x_c^2 + \overline{x_n^2} = \frac{b^2}{K^2} + \frac{(1 + K\tau^2) N}{2\tau}. \quad (3)$$

Для отыскания минимума последнего выражения приравняем нулю первую производную по постоянной времени корректирующего устройства

$$2K\tau^2 - (1 + K\tau^2) = 0,$$

откуда получаем

$$\tau = \frac{1}{1/K} = \frac{1}{1/100} = 0,1 \text{ сек.}$$

Среднеквадратичная ошибка определяется из (3):

$$x_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{10^2}{100^2} + \frac{1 + 100 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 0,1} \cdot 0,2} = 1^{\circ},41.$$

315. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p^2(1 + T p)},$$

где $K = 100 \text{ сек}^{-2}$ и $T = 0,05 \text{ сек.}$

Ответ. :

$$\tau = T + \sqrt{T^2 + \frac{1}{K}} = 0,05 + \sqrt{0,05^2 + 0,01} = 0,16 \text{ сек.}$$

Среднеквадратичная ошибка

$$\begin{aligned} x_{\text{ск}} &= \sqrt{\frac{b^2}{K^2} + \frac{(1 + K\tau^2)N}{2(\tau - T)}} = \\ &= \sqrt{\frac{10^2}{100^2} + \frac{(1 + 100 \cdot 0,16^2) \cdot 0,2}{2(0,16 - 0,05)}} = 1^{\circ},81. \end{aligned}$$

316. Решить задачу 314 в предположении, что можно изменять как значение постоянной времени корректирующего устройства τ , так и общий коэффициент усиления K .

Решение. Дифференцируя выражение (3) в задаче 314 по τ и по K и приравнявая частные производные нулю, получаем

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{K}}, \quad (1)$$

$$-\frac{2b^2}{K^3} + \frac{\tau N}{2} = 0. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и решая последнее уравнение, имеем

$$K_{\text{опт}} = \sqrt[5]{\frac{16b^4}{N^2}} = \sqrt[5]{\frac{1,6 \cdot 10^4}{0,2^2}} = 21 \text{ сек}^{-2}.$$

Постоянная времени корректирующего звена

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = 0,218 \text{ сек.}$$

Среднеквадратичная ошибка определяется из (3) задачи 314,

$$x_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{10^2}{21^2} + \frac{(1 + 21 \cdot 0,218^2) 0,2}{2 \cdot 0,218}} = 1^{\circ},07.$$

317. Передаточная функция разомкнутой системы регулирования имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)},$$

где K — общий коэффициент усиления, а T_1 — постоянная времени. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K}{T_1 p^2 + p + K}.$$

На входе системы действуют помеха в виде белого шума со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N$ и полезный сигнал со спектральной плотностью

$$S_c(\omega) = \frac{2T_c D}{1 + \omega^2 T_c^2}.$$

Между помехой и полезным сигналом отсутствует корреляция. Исходные данные: $T_1 = 0,1$ сек, $T_c = 20$ сек, $D = 100$ град² и $N = 0,01$ град²/гц. Определить оптимальное значение общего коэффициента усиления $K_{\text{опт}}$, соответствующее минимуму среднеквадратичной ошибки, и среднеквадратичную ошибку при $K = K_{\text{опт}}$.

Решение. Составляющая среднего квадрата ошибки, определяемая помехой (см. приложение 17), равна

$$\theta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^2 N d\omega}{|T_1(j\omega)^2 + j\omega + K|^2} = \frac{KN}{2}. \quad (1)$$

Составляющая среднего квадрата ошибки, определяемая полезным сигналом на входе (см. приложение 17),

$$\begin{aligned} \theta_c^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 (1 + \omega^2 T_1^2)}{|T_1(j\omega)^2 + j\omega + K|^2} \frac{2T_c D}{1 + \omega^2 T_c^2} d\omega = \\ &= 2T_c D \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[T_1^2(j\omega)^4 - (j\omega)^2] d\omega}{|T_1 T_c(j\omega)^3 + (T_1 + T_c)(j\omega)^2 + (1 + K T_c)j\omega + K|^2} = \\ &= D \frac{T_1 + T_c + K T_1 T_c}{T_1 + T_c + K T_c^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Результирующий средний квадрат ошибки

$$\bar{\theta}^2 = \theta_n^2 + \theta_c^2 = \frac{KN}{2} + D \frac{T_1 + T_c + K T_1 T_c}{T_1 + T_c + K T_c^2}. \quad (3)$$

При минимизации среднеквадратичной ошибки необходимо приравнять нулю производную от последнего выражения по коэффициенту усиления. В результате имеем

$$\frac{N}{2} - \frac{DT_c(T_c^2 - T_1^2)}{(T_1 + T_c + KT_c^2)^2} = 0.$$

Решение последнего уравнения дает оптимальное значение коэффициента усиления

$$K_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2D(T_c^2 - T_1^2)}{NT_c^3} - \frac{T_c + T_1}{T_c^2}}.$$

Определяем численное значение оптимального коэффициента усиления

$$K_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100(20^2 - 0,1^2)}{0,01 \cdot 20^3} - \frac{20 + 0,1}{20^2}} \approx 30 \text{ сек}^{-1}.$$

Среднеквадратичная ошибка на основе (3) равна

$$\theta_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 0,01}{2} + 100 \frac{0,1 + 20 + 30 \cdot 0,1 \cdot 20}{0,1 + 20 + 30 \cdot 20^2}} = 0^{\circ},9.$$

318. Для предыдущей задачи определить передаточную функцию системы регулирования, соответствующую теоретическому минимуму среднеквадратичной ошибки, и определить значение последней.

Решение. При условии физической реализуемости системы регулирования искомая частотная передаточная функция замкнутой системы может быть представлена в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)}. \quad (1)$$

Знаменатель (1) определяется из равенства

$$\psi(j\omega)\psi^*(j\omega) = S_c(\omega) + S_n(\omega), \quad (2)$$

где $\psi^*(j\omega)$ является комплексно сопряженной $\psi(j\omega)$. Для нашего случая

$$S_c(\omega) + S_n(\omega) = \frac{2T_c D}{1 + \omega^2 T_c^2} + N = \frac{2T_c D + N(1 + \omega^2 T_c^2)}{1 + \omega^2 T_c^2}.$$

Разложим последнее выражение на комплексно сопряженные множители

$$\frac{2T_c D + N(1 + \omega^2 T_c^2)}{1 + \omega^2 T_c^2} = A \frac{(1 + ja\omega)(1 - ja\omega)}{(1 + jT_c\omega)(1 - jT_c\omega)}.$$

Отсюда имеем

$$\psi(j\omega) = \sqrt{A} \frac{1 + ja\omega}{1 + jT_c\omega}, \quad (3)$$

$$\psi^*(j\omega) = \sqrt{A} \frac{1 - ja\omega}{1 - jT_c\omega}, \quad (4)$$

где

$$A = 2T_c D + N, \quad a^2 = \frac{NT_c^2}{2T_c D + N} = \frac{NT_c^2}{A}.$$

Далее находим выражение

$$\frac{S_c(\omega)}{\psi^*(\omega)} = \frac{2T_c D (1 - jT_c\omega)}{(1 + \omega^2 T_c^2) \sqrt{A} (1 - ja\omega)} = \frac{2T_c D}{\sqrt{A}} \frac{1}{(1 + jT_c\omega)(1 - ja\omega)}.$$

Разложим последнее выражение на простые дроби

$$\frac{S_c(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \frac{2T_c D}{\sqrt{A}} \left[\frac{T_c}{T_c + a} \frac{1}{1 + jT_c\omega} + \frac{a}{T_c + a} \frac{1}{1 - ja\omega} \right].$$

Функция $B(j\omega)$ определяется членами разложения, соответствующими полюсам $S_c(\omega)$, лежащим в верхней полуплоскости. В результате имеем

$$B(j\omega) = \frac{2T_c D}{\sqrt{A}} \frac{T_c}{T_c + a} \frac{1}{1 + jT_c\omega}. \quad (5)$$

Искомая частотная передаточная функция замкнутой системы (1) равна

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{2T_c D}{A} \frac{T_c}{T_c + a} \frac{1}{1 + ja\omega}. \quad (6)$$

Определяем численные значения коэффициентов

$$a = T_c \sqrt{\frac{N}{2T_c D + N}} = 20 \sqrt{\frac{0,01}{2 \cdot 20 \cdot 100 + 0,01}} = 0,032 \text{ сек},$$

$$\frac{2T_c^2 D}{A(T_c + a)} = \frac{2T_c^2 D}{(2T_c D + N)(T_c + a)} \approx \frac{2T_c^2 D}{2T_c^2 D} = 1.$$

Окончательное выражение для передаточной функции

замкнутой системы примет вид

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + T p}, \quad (7)$$

где $T = 0,032$ сек. Этой передаточной функции соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)} = \frac{1}{T p} = \frac{K}{p}, \quad (8)$$

где $K = \frac{1}{T} = 31$ сек⁻¹ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы (добротность по скорости).

Передаточная функция относительно ошибки

$$\Phi_\theta(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T p}{1 + T p}. \quad (9)$$

Спектральная плотность ошибки

$$\begin{aligned} S_\theta(\omega) &= |\Phi_\theta(j\omega)|^2 S_c(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) = \\ &= \frac{T^2 \omega^2}{1 + \omega^2 T^2} \frac{2 T_c D}{1 + \omega^2 T_c^2} + \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} N. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрирование (10) по всем частотам дает средний квадрат ошибки

$$\overline{\theta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\omega) d\omega = \frac{T D}{T_c + T} + \frac{N}{2T}. \quad (11)$$

Среднеквадратичная ошибка равна

$$\theta_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{T D}{T_c + T} + \frac{N}{2T}} = \sqrt{\frac{0,032 \cdot 100}{20 + 0,032} + \frac{0,01}{2 \cdot 0,032}} = 0^\circ,56.$$

СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 8.1. Построение переходных процессов

319. Определить весовую функцию системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{dx}{dt} + (a_1^0 + bt) x = f(t), \quad (1)$$

где $a_0 = 1$ сек, $a_1^0 = 0,5$ и $b = 0,2$ сек⁻¹, при поступлении на вход единичной δ -функции $f(t) = \delta(t - \vartheta)$ в произвольный момент $t = \vartheta$. Начальное условие $x = 0$ при $t = 0$.

Решение. В выражении (1) сделаем подстановку $f(t) = \delta(t - \vartheta)$ и разделим все члены на a_0 ,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1^0 + b(t)}{a_0} x = \frac{\delta(t - \vartheta)}{a_0} \quad (2)$$

или

$$\frac{dx}{dt} + P(t) x = Q(t). \quad (3)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\vartheta}^t P(t) dt = \int_{\vartheta}^t \frac{a_1^0 + bt}{a_0} dt = \\ &= \frac{a_1^0}{a_0} (t - \vartheta) + \frac{b}{2a_0} (t^2 - \vartheta^2) = \alpha(t - \vartheta) + \beta(t^2 - \vartheta^2). \end{aligned}$$

Весовая функция

$$\begin{aligned} w(t - \vartheta, \vartheta) &= e^{-s(t)} \int_{\vartheta}^t \frac{\delta(t - \vartheta)}{a_0} e^{+s(t)} dt = \\ &= e^{-\alpha(t - \vartheta) - \beta(t^2 - \vartheta^2)} \int_{\vartheta}^t \frac{\delta(t - \vartheta)}{a_0} e^{+\alpha(t - \vartheta) + \beta(t^2 - \vartheta^2)} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

При вычислении последнего интервала необходимо воспользоваться известным свойством δ -функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \vartheta) f(t) dt = f(\vartheta).$$

Тогда из формулы (4) имеем

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{a_0} e^{-\alpha(t - \vartheta) - \beta(t^2 - \vartheta^2)}. \quad (5)$$

Подстановка числовых значений дает

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = e^{-0,5(t - \vartheta) - 0,1(t^2 - \vartheta^2)}. \quad (6)$$

320. Для весовой функции предыдущей задачи построить графики:

1) нормальной весовой функции при $\vartheta = 2$ сек в виде $w(t - \vartheta, \vartheta)$ и в виде $w(\tau, \vartheta)$, где $\tau = t - \vartheta$,

2) сопряженной весовой функции при $t = 5$ сек в виде $w(t - \vartheta, \vartheta)$, т. е. в зависимости от смещения ϑ , и в виде $w(\vartheta, t - \vartheta)$, где $\vartheta = t - \vartheta$ — реверс-смещение.

Ответ. 1) Нормальная весовая функция

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = e^{-0,5(t - 2) - 0,1(t^2 - 4)} \quad \text{при } t \geq \vartheta = 2 \text{ сек.}$$

График изображен на рис. 188, а. Переход к времени $\tau = t - \vartheta$ дает

$$w(\tau, \vartheta) = e^{-0,5\tau - 0,1\tau(\tau + 2\vartheta)} = e^{-0,9\tau - 0,1\tau^2} \quad \text{при } \tau \geq 0.$$

График изображен на рис. 188, б.

2) Сопряженная весовая функция

$$\begin{aligned} w(t - \vartheta, \vartheta) &= e^{-0,5(5 - \vartheta) - 0,1(25 - \vartheta^2)} = e^{0,5(\vartheta - 5) + 0,1(\vartheta^2 - 25)} \\ &\quad \text{при } \vartheta \leq t = 5 \text{ сек.} \end{aligned}$$

График изображен на рис. 188, в.

Переход к реверс-смещению $\theta = t - \vartheta = 5 - \vartheta$ дает

$$\omega(\theta, t - \theta) = e^{-1,5\theta + 0,1\theta^2} \quad \text{при } \theta \geq 0.$$

График изображен на рис. 188, г.

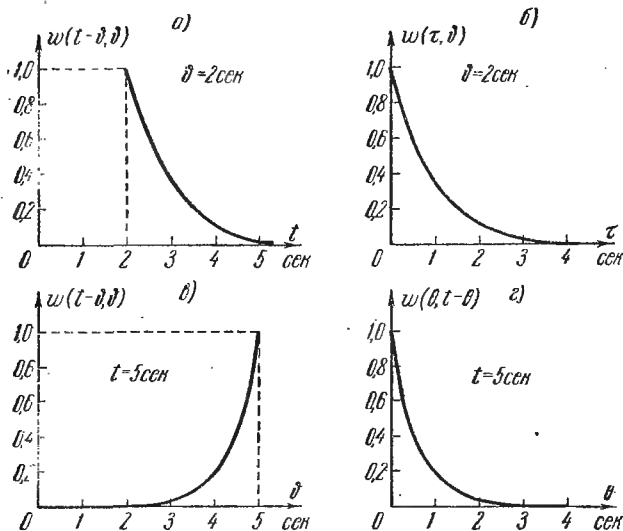


Рис. 188. Графики к задаче 320.

321. Методом последовательных приближений построить переходный процесс в системе, описываемой дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2 x = g(t) \quad (1)$$

при поступлении на вход в момент времени $t = \vartheta = 1 \text{ сек}$ ступенчатой функции $g(t) = g_0 1(t - \vartheta)$. Значения коэффициентов: $a_0 = 1 \text{ сек}^2$, $a_1(t) = (0,9 + 0,1t) \text{ сек}$, $a_2 = 0,16$ и $g_0 = 1,6$. Начальные условия нулевые.

Решение. Замораживаем переменный коэффициент дифференциального уравнения (1) в момент времени $t = \vartheta = 1 \text{ сек}$. В результате получаем $a_1(\vartheta) = a_1^0 + 0,1 = 1 \text{ сек}$.

Уравнение (1) записываем в виде

$$a_0 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + a_1(\vartheta) \frac{dx}{d\tau} + a_2 x = g(\tau) - 0,1\tau \frac{dx}{d\tau}. \quad (2)$$

Первое приближение находится из дифференциального уравнения

$$a_0 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + a_1(\vartheta) \frac{dx_1}{d\tau} + a_2 x_1 = g_0 1(\tau), \quad (3)$$

$$\tau = t - \vartheta.$$

Используя преобразование Лапласа, находим изображение искомой величины

$$X_1(p) = \frac{G(p)}{a_0 p^2 + a_1(\vartheta)p + a_2} = \frac{1,6}{p(p^2 + p + 0,16)} =$$

$$= \frac{1,6}{p(p + 0,8)(p + 0,2)} = \frac{10}{p} - \frac{13,3}{p + 0,2} + \frac{3,3}{p + 0,8}.$$

Переход к оригиналу (см. приложение 1) дает

$$x_1(\tau) = 10(1 - 1,33e^{-0,2\tau} + 0,33e^{-0,8\tau}).$$

Поправка $x_2(\tau)$ находится в результате решения уравнения

$$a_0 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + a_1(\vartheta) \frac{dx_2}{d\tau} + a_2 x_2 = -0,1\tau \frac{dx_1}{d\tau}. \quad (4)$$

Подстановка в (4) числовых значений коэффициентов, а также найденного первого приближения дает

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \frac{dx_2}{d\tau} + 0,16x_2 = 0,027\tau(e^{-0,8\tau} - e^{-0,2\tau}). \quad (5)$$

Изображение искомой поправки

$$X_2(p) = \frac{0,027}{p^2 + p + 0,16} \left[\frac{1}{(p + 0,8)^2} - \frac{1}{(p + 0,2)^2} \right] =$$

$$= \frac{0,027}{(p + 0,8)^3(p + 0,2)} - \frac{0,027}{(p + 0,2)^3(p + 0,8)}. \quad (6)$$

Переход к оригиналу можно сделать, воспользовавшись интегралом свертки. Для этого запишем оригиналы

следующих изображений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p+0,8} &\doteq e^{-0,8\tau}, \\ \frac{1}{p+0,2} &\doteq e^{-0,2\tau}, \\ \frac{1}{(p+0,8)^3} &\doteq \frac{\tau^2}{2} e^{-0,8\tau}, \\ \frac{1}{(p+0,2)^3} &\doteq \frac{\tau^2}{2} \cdot e^{-0,2\tau}.\end{aligned}$$

Интеграл свертки

$$\begin{aligned}x_2(\tau) &= 0,027 \int_0^\tau \frac{\tau_1^2}{2} e^{-0,8\tau_1} \cdot e^{-0,2(\tau-\tau_1)} d\tau_1 - \\ &- 0,027 \int_0^\tau \frac{\tau_1^2}{2} e^{-0,2\tau_1} \cdot e^{-0,8(\tau-\tau_1)} d\tau_1 = \\ &= 0,027 \int_0^\tau \frac{\tau_1^2}{2} e^{-0,6\tau_1-0,2\tau} d\tau_1 - 0,027 \int_0^\tau \frac{\tau_1^2}{2} e^{0,6\tau_1-0,8\tau} d\tau_1.\end{aligned}$$

Вычисление интегралов дает

$$x_2(\tau) = 0,075 [e^{-0,2\tau} (\tau - 0,3\tau^2) - e^{-0,8\tau} (\tau + 0,3\tau^2)].$$

Таким образом, второе приближение дает

$$\begin{aligned}x(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau) &= 10(1 - 1,33e^{-0,2\tau} + 0,33e^{-0,8\tau}) + \\ &+ 0,075 [e^{-0,2\tau} (\tau - 0,3\tau^2) - e^{-0,8\tau} (\tau + 0,3\tau^2)].\end{aligned}$$

Сравнение $x_2(\tau)$ и $x_1(\tau)$ показывает, что вычисление следующей поправки $x_3(\tau)$ не является необходимым.

322. Параметрическая передаточная функция замкнутой системы регулирования имеет вид

$$\Phi(p, t) = \frac{a}{p + a + bt + ct^2}. \quad (1)$$

Определить переходную функцию системы при поступлении входного воздействия $g(t) = g_0 l(t)$.

Решение. Изображение по Лапласу входной величины

$$G(p) = \frac{g_0}{p}.$$

Изображение выходной величины равно

$$Y(p, t) = \Phi(p, t) \cdot G(p) = \frac{ag_0}{p(p + a + bt + ct^2)}. \quad (2)$$

Зафиксировав в выражении (2) время $t = \text{const}$, на основании приложения 1 находим оригинал,

$$y(t) = \frac{ag_0}{a + bt + ct^2} [1 - e^{-(a+bt+ct^2)t}].$$

323. Построить графическим путем переходный процесс в системе, описываемой дифференциальным уравнением

$$a_0(t) \frac{dx}{dt} + a_1 x = f_1(x). \quad (1)$$

График изменения входного воздействия $f_1(t)$ изображен на рис. 189, а. График изменения коэффициента

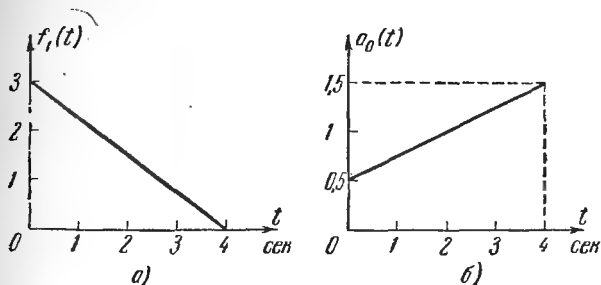


Рис. 189. Графики к задаче 323.

$a_0(t)$ дан на рис. 189, б. Коэффициент $a_1 = 2$. Начальное значение $x = x_0 = 1,5$ при $t = 0$.

Решение. Все члены уравнения (1) разделим на a_1 ,

$$T(t) \frac{dx}{dt} + x = f(t). \quad (2)$$

Здесь

$$T(t) = \frac{a_0(t)}{a_1} \quad \text{и} \quad f(t) = \frac{f_1(t)}{a_1}.$$

§ 8.2. Оценка устойчивости и качества регулирования

324. Система регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_2(t) \frac{dy}{dt} + a_3 y = b_0 g(t). \quad (1)$$

Значения коэффициентов: $a_0 = 0,1 \text{ сек}^3$, $a_1 = 4,2 \text{ сек}^2$, $a_2(t) = (72 - 0,1t) \text{ сек}$, $a_3 = 400$ и $b_0 = 400$. Оценить приблизительно устойчивость системы, если время работы ее $T = 100 \text{ сек}$.

Решение. Рассмотрим систему с замороженными коэффициентами при $t = 0$ и при $t = T = 100 \text{ сек}$. В этих случаях характеристическое уравнение, соответствующее исходному дифференциальному уравнению (1), будет

$$0,1p^3 + 4,2p^2 + 72p + 400 = 0, \quad (2)$$

$$0,1p^3 + 4,2p^2 + 62p + 400 = 0. \quad (3)$$

Для уравнения (2) находим корни: $p_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$, $p_{2-3} = (-16 \pm j12) \text{ сек}^{-1}$. Степень устойчивости $\eta = |p_1| = 10 \text{ сек}^{-1}$. Время переходного процесса $t_n \approx 3\eta^{-1} = 0,3 \text{ сек}$.

Для уравнения (3) корни равны $p_1 = -25 \text{ сек}^{-1}$, $p_{2-3} = (-8,8 \pm j8,7) \text{ сек}^{-1}$. Степень устойчивости $\eta = 8,8 \text{ сек}^{-1}$. Время переходного процесса $t_n < 3\eta^{-1} = 0,34 \text{ сек}$.

За время переходного процесса коэффициент $a_2(t)$ изменяется на величину $\Delta a_2 \approx 0,1 \cdot 0,34 = 0,034$, что составляет приблизительно 0,05%. Следовательно, система может рассматриваться как квазистационарная. Оценка устойчивости может быть сделана по замороженным коэффициентам характеристического уравнения. Применяя критерий Гурвица, имеем

$$a_1 a_2(t) > a_0 a_3.$$

Подстановка числовых значений даст

$$4,2(72 - 0,1t) > 40.$$

Последнее неравенство выполняется при любом времени, лежащем в пределах $0 \leq t \leq 100 \text{ сек}$. Следовательно, система устойчива.

325. Дана весовая функция квазистационарной системы

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = e^{-\alpha(\vartheta_0 - \vartheta)(t - \vartheta)},$$

где $\vartheta_0 = 20$ сек, $\alpha = 5$ сек⁻², t — текущее время, отсчитываемое от момента включения системы, ϑ — момент поступления входного импульса. Определить устойчивость системы.

Ответ. Нормальная весовая функция затухает и система является устойчивой в пределах времени $0 \leq t < \vartheta_0 = 20$ сек. При $t > \vartheta_0$ любое малое возмущение на входе может вызвать неограниченное возрастание выходной величины.

326. Параметрическая передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(p, t) = \frac{a}{p + a + bt + ct^2}, \quad (1)$$

где $a = 10$ сек⁻¹, $b = 0,1$ сек⁻² и $c = 0,01$ сек⁻³. Определить коэффициенты ошибки $c_0(t)$, $c_1(t)$ и $c_2(t)$.

Решение. Находим передаточную функцию замкнутой системы относительно ошибки:

$$\Phi_x(p, t) = 1 - \Phi(p, t) = \frac{p + bt + ct^2}{p + a + bt + ct^2}. \quad (2)$$

Разлагая последнее выражение в ряд по степени оператора p , получаем

$$\Phi_x(p, t) = \frac{bt + ct^2}{a + bt + ct^2} + \frac{ap}{(a + bt + ct^2)^2} - \frac{ap^2}{(a + bt + ct^2)^3} + \dots$$

Отсюда можно определить коэффициенты ошибки

$$c_0(t) = \frac{bt + ct^2}{a + bt + ct^2} = \frac{0,1t + 0,01t^2}{10 + 0,1t + 0,01t^2},$$

$$c_1(t) = \frac{a}{(a + bt + ct^2)^2} = \frac{10}{(10 + 0,1t + 0,01t^2)^2},$$

$$\frac{c_2(t)}{2} = \frac{a}{(a + bt + ct^2)^3} = \frac{10}{(10 + 0,1t + 0,01t^2)^3}.$$

327. Объект регулирования совместно с исполнительным органом описывается дифференциальным

уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (b_0 + b_1 t) x(t), \quad (1)$$

где y — регулируемая величина, $x = g - y$ — ошибка, g — входное воздействие, $b_0 = 100 \text{ сек}^{-2}$ и $b_1 = 0,1 \text{ сек}^{-3}$. Считая систему квазистационарной, определить необходимые корректирующие устройства, чтобы в пределах времени работы системы $0 \leq t < 1000 \text{ сек}$ замкнутая система имела бы показатель колебательности, не превышающий значения $M = 1,5$.

Задачу решить методом замораживания коэффициентов.

Решение. Передаточная функция исходной разомкнутой системы с замороженным коэффициентом равна

$$W_0(p) = \frac{b_0 + b_1 t}{p^2} = \frac{K}{p^2}. \quad (2)$$

Л. а. х. представляет собой прямую с наклоном -40 дБ/дек (рис. 191). Базовая частота л. а. х. $\omega_0 = \sqrt{K}$.

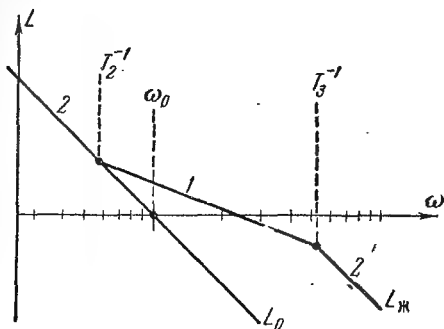


Рис. 191. Л. а. х. к задаче 327.

Используя л. а. х. типа 2—1—2 (см. приложение 19), получаем желаемую передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)}.$$

Постоянные времени равны

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}},$$

$$T_3 = \frac{T_2(M-1)}{M+1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

Передаточная функция корректирующего звена выражается в виде

$$W_{\text{кз}}(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{W_0(p)} = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_3 p}.$$

Подстановка исходных значений дает требуемые законы изменения постоянных времени

$$T_2 = \sqrt{\frac{3}{100 + 0,1t}},$$

$$T_3 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{100 + 0,1t}}.$$

При $t = 0$ значения постоянных времени $T_2 = 0,173$ сек и $T_3 = 0,0346$ сек. При $t = 1000$ сек, $T_2 = 0,123$ сек и $T_3 = 0,0246$ сек.

328. Определить передаточную функцию объекта совместно с исполнительным органом по данным предыдущей задачи методом замороженных реакций.

Решение.

1. *Замораживание весовой функции.*

В уравнении (1) предыдущей задачи необходимо положить $x(t) = \delta(t - \vartheta)$.

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = \int_{\vartheta}^t (b_0 + b_1 t) \delta(t - \vartheta) dt = b_0 + b_1 \vartheta, \quad (1)$$

$$y = w_0(t - \vartheta, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t (b_0 + b_1 \vartheta) dt =$$

$$= (b_0 + b_1 \vartheta)(t - \vartheta) = (b_0 + b_1 \vartheta) \tau. \quad (2)$$

Зафиксировав в последнем выражении $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, получаем $w_0(\tau) = (b_0 + b_1 \vartheta_0) \tau$. Переход к передаточной

функции объекта дает

$$W_0(p) = L[(b_0 + b_1\vartheta_0)\tau] = \frac{b_0 + b_1\vartheta_0}{p^2} = \frac{K}{p^2}. \quad (3)$$

Эта передаточная функция совпадает с полученным в задаче 327 выражением (2). Поэтому использование замороженной весовой функции в данном случае не дает ничего нового по сравнению с методом замороженных коэффициентов.

2. Замораживание переходной функции.

В выражении (1) задачи 327 положим $x(t) = 1(t - \vartheta)$. Тогда, положив $t - \vartheta = \tau$, имеем

$$\frac{dy}{d\tau} = \int_0^\tau [b_0 + b_1(\vartheta + \tau)] l(\tau) d\tau = b_0\tau + b_1\vartheta\tau + \frac{b_1\tau^2}{2}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y &= h_0(t - \vartheta, \vartheta) = \int_0^\tau \left(b_0\tau + b_1\vartheta\tau + \frac{b_1\tau^2}{2} \right) d\tau = \\ &= \frac{b_0\tau^2}{2} + \frac{b_1\vartheta\tau^2}{2} + \frac{b_1\tau^3}{6}. \end{aligned} \quad (5)$$

Зафиксировав смещение $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, получаем замороженную переходную функцию $h_0(\tau) = \frac{b_0\tau^2}{2} + \frac{b_1\vartheta_0\tau^2}{2} + \frac{b_1\tau^3}{6}$. Продифференцировав ее по τ , получаем замороженную весовую функцию $\omega_0(\tau) = (b_0 + b_1\vartheta_0)\tau + \frac{b_1\tau^2}{2}$. Передаточная функция объекта

$$\begin{aligned} W_0(p) &= L\left[(b_0 + b_1\vartheta_0)\tau + \frac{b_1\tau^2}{2}\right] = \\ &= \frac{b_0 + b_1\vartheta_0}{p^2} + \frac{b_1}{p^3} = \frac{b_1(1 + T_0p)}{p^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $T_0 = \frac{b_0 + b_1\vartheta_0}{b_1}$ меняется в пределах от 1000 сек при $\vartheta_0 = 0$ до 2000 сек при $\vartheta_0 = 1000$ сек.

СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 9.1. Системы с временным запаздыванием

329. Структурная схема автоматической системы имеет вид, показанный на рис. 192. Определить, при какой величине общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2$ замкнутая система устойчива

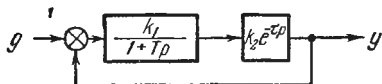


Рис. 192. Структурная схема к задачам 329 и 330.

при любых значениях постоянной времени T и времени запаздывания τ .

Ответ. $K \leq 1$.

330. Для системы автоматического управления, структурная схема которой показана на рис. 192, определить критическое время запаздывания τ_k . Общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2$. Постоянная времени $T = 0,5$ сек.

Решение. Частотная передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(j\omega) = \frac{K e^{-j\omega\tau}}{1 + j\omega T},$$

где $K = k_1 k_2$.

Частоту среза ω_c , при которой а. ф. х. разомкнутой системы пересекает окружность единичного радиуса, найдем из условия

$$|W(j\omega_c)| = 1. \quad (1)$$

Из уравнения (1) получим

$$\omega_c = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T}.$$

Критическое время запаздывания τ_k найдем из условия равенства фазовой частотной характеристики разомкнутой системы при частоте $\omega = \omega_c$ величине $-\pi$

$$\psi(\omega_c) = -\operatorname{arctg} \omega_c T - \omega_c \tau_k = -\pi.$$

Из последнего уравнения находим

$$\tau_k = \frac{\pi - \operatorname{arctg} \omega_c T}{\omega_c} = \frac{\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K^2 - 1}} T = 0,18 \text{ сек.}$$

331. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)},$$

где $K = 20 \text{ сек}^{-1}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T = 0,1 \text{ сек}$ — постоянная времени. Последовательно в канал управления включается звено чистого запаздывания, имеющее передаточную функцию $e^{-\tau p}$, где τ — время запаздывания. Требуется найти критическое время запаздывания τ_k , при котором замкнутая система автоматического управления находится на границе устойчивости, и частоту незатухающих колебаний ω_k .

Ответ. $\omega_k = 12,5 \text{ сек}^{-1}$, $\tau_k = 0,11 \text{ сек}$.

332. Решить предыдущую задачу, если постоянная времени $T = 0$.

Ответ. $\omega_k = 20 \text{ сек}^{-1}$, $\tau_k = 0,78 \text{ сек}$.

333. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

С помощью логарифмических частотных характеристик определить критическое время запаздывания τ_k , если коэффициент усиления разомкнутой системы $K = 30 \text{ сек}^{-1}$, постоянные времени $T_1 = 0,025 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,2 \text{ сек}$.

Решение. Асимптотическая л. а. х. системы приведена на рис. 193. Частота среза разомкнутой системы

$\omega_c = 12,6 \text{ сек}^{-1}$. Фазовая частотная характеристика при частоте $\omega = \omega_c$ и критическом времени запаздывания τ_k

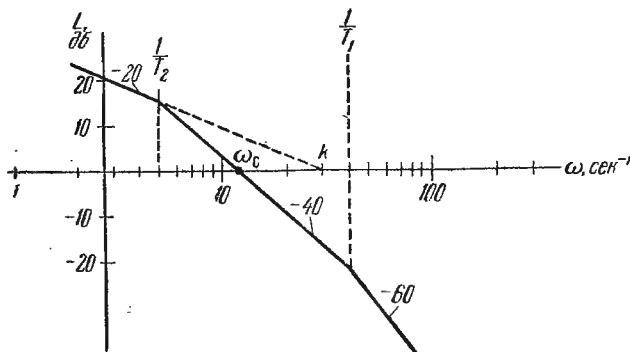


Рис. 193. Асимптотическая л. а. х. к задаче 333.

должна пересекать линию $\psi = -\pi$. Поэтому

$$\psi(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega_c T_1 - \operatorname{arctg} \omega_c T_2 - \omega_c \tau_k = -\pi.$$

Отсюда находим

$$\tau_k = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega_c T_1 - \operatorname{arctg} \omega_c T_2}{\omega_c} = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ сек.}$$

334. Определить критическое время запаздывания τ_k системы, структурная схема которой приведена на

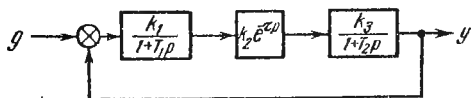


Рис. 194. Структурная схема к задаче 334.

рис. 194. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2 k_3 = 5$, постоянные времени апериодических звеньев $T_1 = 5 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,4 \text{ сек}$.

Ответ. $\tau_k = 1,4 \text{ сек}$.

335. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1 + T^2 p^2)},$$

где $K = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T = 0,1 \text{ сек}$. Для достижения устойчивости системы последовательно в канал управления вводится звено чистого запаздывания с передаточной функцией $e^{-\tau p}$. Определить, при каких значениях времени запаздывания τ замкнутая система устойчива.

Решение. Результирующая передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = W_0(p) e^{-\tau p} = \frac{K e^{-\tau p}}{p(1 + T^2 p^2)}$.

Асимптотическая л. а. х. системы приведена на рис. 195. Замкнутая система будет устойчивой, если

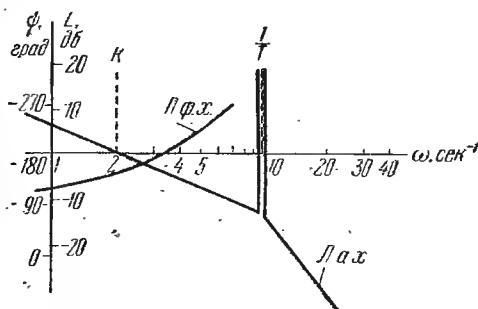


Рис. 195. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 335.

л. ф. х. пересекает линию $\psi = -\pi$ в диапазоне частот $K \div \frac{1}{T}$. Критические значения времени запаздывания τ_k находим из следующих уравнений:

$$-\frac{\pi}{2} - K\tau_{\max} = -\pi, \quad -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\tau_{\min} = -\pi.$$

Отсюда

$$\tau_{k \max} = \frac{\pi}{2K} = 0,79 \text{ сек}, \quad \tau_{k \min} = \frac{\pi}{2} T = 0,16 \text{ сек}.$$

Замкнутая система устойчива, если выполняется следующее неравенство: $0,16 \text{ сек} < \tau < 0,79 \text{ сек}$.

336. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где $K = 0,5$, $T_2 = 1 \text{ сек}^2$, $T_1 = 0,25 \text{ сек}$.

Определить устойчивость замкнутой системы при следующих значениях времени запаздывания τ : а) $\tau = 0$; б) $\tau = 0,3 \text{ сек}$; в) $\tau = 2 \text{ сек}$; г) $\tau = 5 \text{ сек}$.

Ответ: а) Система устойчива; б) система устойчива; в) система неустойчива; г) система устойчива.

337. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 196. Коэффициенты передачи звеньев соответственно равны $k_1 = 1 \text{ сек}^{-1}$, $k_2 = 0,125$, $k_3 = 1$. Постоянная времени $T = 2 \text{ сек}$. Время запаздывания

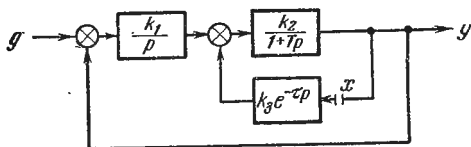


Рис. 196. Структурная схема к задаче 337.

$\tau = 0,2 \text{ сек}$. Определить устойчивость системы по критерию Найквиста. Размыкание системы произвести в точке x (см. рис. 196).

Ответ. Система устойчива.

338. Передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p^2(1 + T_2 p)} e^{-\tau p},$$

где $T_1 = 0,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,2 \text{ сек}$, $\tau = 0,3 \text{ сек}$.

Определить значения общего коэффициента усиления разомкнутой системы K , при которых замкнутая система устойчива.

Решение. Фазовая частотная характеристика системы определяется следующим выражением:

$$\psi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 - \omega \tau \frac{180^\circ}{\pi}, \quad (1)$$

и приведена на рис. 197. Замкнутая система устойчива, если л. а. х. пересекает линию $L=0$ левее точки пересечения $\psi(\omega)$ линии $\psi = -180^\circ$. В критическом случае л. а. х. пересекает линию $L=0$ на частоте ω_{π} . Проводим асимптотическую л. а. х. так, чтобы она пересекала

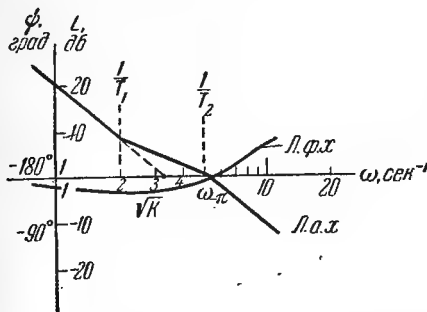


Рис. 197. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 338.

линию $L=0$ на частоте ω_{π} . Точка пересечения низкочастотной асимптоты л. а. х. с осью частот равна $\sqrt{K_k} = 3,5 \text{ сек}^{-1}$. Отсюда находим, что $K_k = 3,5^2 = 12,2 \text{ сек}^{-2}$. Асимптотическая л. а. х. в точке излома примерно на 3 дБ отличается от действительной л. а. х. Поэтому окончательно получаем $K_k = \sqrt{2} \cdot 12,2 = 17 \text{ сек}^{-2}$. Замкнутая система устойчива при $0 < K < 17 \text{ сек}^{-2}$.

339. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{p(1+Tp)},$$

где $K = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T = 0,05 \text{ сек}$, τ — время запаздывания.

Определить допустимое значение времени запаздывания τ_d , при котором показатель колебательности системы не превышает $M = 1,1$.

Решение. Показатель колебательности системы не превышает заданного значения M , если выполняется следующее условие [2]:

$$K(T + \tau) \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}.$$

Из неравенства получаем выражение для допустимого времени запаздывания

$$\tau_d = \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1} - 2KT}{2K} = 0,036 \text{ сек.}$$

340. Определить запас устойчивости по фазе и частоту среза разомкнутой системы при условиях предыдущей задачи. Значения коэффициентов: общий коэффициент усиления $K = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T = 0,05 \text{ сек}$, $\tau = 0,036 \text{ сек}$.

Ответ. Запас устойчивости по фазе $\mu = 42,5^\circ$. Частота среза $\omega_c = 10 \text{ сек}^{-1}$.

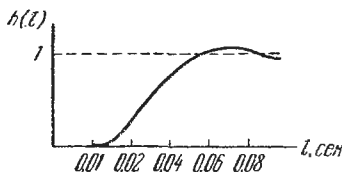
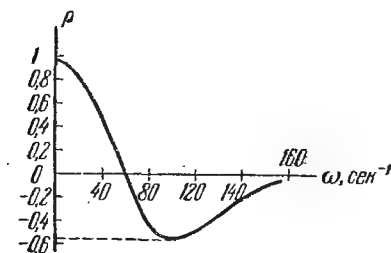


Рис. 198. Вещественная частотная характеристика к задаче 341.

Рис. 199. Переходная функция к задаче 341.

341. Построить переходную функцию системы, передаточная функция которой имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{p + K e^{-\tau p}},$$

где $K = 40 \text{ сек}^{-1}$, $\tau = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.

Решение. Амплитудно-фазовая характеристика системы равна

$$\Phi(j\omega) = \frac{K e^{-j\omega\tau}}{j\omega + K e^{-j\omega\tau}} = \frac{K (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)}{j\omega + K (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)}.$$

Вещественная частотная характеристика соответственно равна

$$P(\omega) = \operatorname{Re} \Phi(j\omega) = \frac{K^2 - K\omega \sin \omega\tau}{K^2 + \omega^2 - 2K\omega \sin \omega\tau}. \quad (1)$$

Вещественная частотная характеристика, построенная по выражению (1) для $K = 40 \text{ сек}^{-1}$ и $\tau = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$, приведена на рис. 198.

По вещественной частотной характеристике методом трапеций построена переходная функция (рис. 199).

§ 9.2. Системы с распределенными параметрами

342. Структурная схема системы автоматического управления гидротурбиной имеет вид, изображенный на рис. 200. v , v_d , φ и μ — соответственно относительные

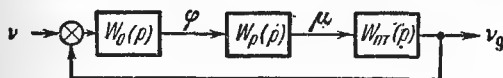


Рис. 200. Структурная схема системы управления гидротурбиной.

величины момента нагрузки турбины, момента, развиваемого турбиной, угловой скорости вращения турбины и перемещения регулирующего органа [8]. Передаточная функция трубопровода, полученная с учетом волновых явлений [8], равна

$$W_T(p) = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{1 + \gamma \operatorname{th} \tau p}.$$

Передаточная функция турбины $W_0(p) = \frac{k_0}{1 + T_0 p}$, передаточная функция безинерционного регулятора $W_p(p) = \frac{1}{\delta}$, $\delta = 0,05$, $T_0 = 6 \text{ сек}$, $k_1 = 1$, $\gamma = 0,05$. Определить критическое время запаздывания τ_k , соответствующее границе устойчивости системы.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k_0}{\delta(1 + T_0 p)} \cdot \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{1 + \gamma \operatorname{th} \tau p} = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{\delta(1 + T_0 p)(1 + \gamma \operatorname{th} \tau p)}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы записывается в виде

$$\delta(1 + T_0 p)(1 + \gamma \operatorname{th} \tau p) + 1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p = 0.$$

После замены $\text{th} \tau p$ на $\frac{e^{\tau p} - e^{-\tau p}}{e^{\tau p} + e^{-\tau p}}$ и несложных преобразований характеристическое уравнение приведем к следующему виду

$$1 - 2\gamma + (1 + \gamma)\delta + (1 + \gamma)\delta T_0 p + [1 + 2\gamma + (1 - \gamma)\delta + (1 - \gamma)\delta T_0 p] e^{-2\tau p} = 0.$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы (эквивалентность понимается в смысле тождественности характеристических уравнений замкнутой системы) равна

$$\begin{aligned} W_0(p) &= \frac{1 + 2\gamma + (1 - \gamma)\delta + (1 - \gamma)\delta T_0 p}{1 - 2\gamma + (1 + \gamma)\delta + (1 + \gamma)\delta T_0 p} e^{-2\tau p} = \\ &= 1,46 \frac{1 + 0,22p}{1 + 0,38p} e^{-2\tau p}. \end{aligned}$$

Эквивалентная частотная передаточная функция разомкнутой системы примет вид

$$W_0(j\omega) = 1,46 \frac{1 + 0,22(j\omega)}{1 + 0,38(j\omega)} e^{-j2\omega\tau}. \quad (1)$$

Частота среза, соответствующая модулю (1), равному единице, равна

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1,46^2 - 1}{0,38^2 - (0,22 \cdot 1,46)^2}} = 5,3 \text{ сек}^{-1}.$$

При $\tau = \tau_k$ фазовый сдвиг на частоте $\omega = \omega_c$ должен равняться $-\pi$. Поэтому

$$\arctg(0,22 \cdot 5,3) - \arctg(0,38 \cdot 5,3) - 2 \cdot 5,3\tau_k = -\pi.$$

Из последнего уравнения получаем

$$\tau_k = \frac{\pi - \arctg(0,22 \cdot 5,3) + \arctg(0,38 \cdot 5,3)}{2 \cdot 5,3} = 0,27 \text{ сек}.$$

343. Найти значение для критического времени запаздывания системы, рассмотренной в предыдущей задаче, если

$$W_0(p) = \frac{1}{T_0 p}, \quad T_0 = 10 \text{ сек}, \quad \delta = 0,05, \quad \gamma = 2.$$

Ответ.

$$\tau_k = \frac{\delta T_0 \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}\gamma}{2\gamma^2 - 1}}{2\sqrt{2}} = 0,12 \text{ сек.}$$

344. Определить частоту среза разомкнутой системы и запас устойчивости по фазе для системы, рассмотренной в задаче 342. Передаточная функция объекта $W_0(p) = \frac{k_0}{1 + T_0 p}$, передаточная функция приведенного трубопровода $W_\tau = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{1 + \gamma \operatorname{th} \tau p}$, передаточная функция регулятора $W_p(p) = \frac{k_p (1 + T_1 p)}{p (1 + T_2 p)}$. Значения коэффициентов: коэффициент передачи турбины $k_0 = 20$; постоянная времени турбины $T_0 = 31,5 \text{ сек}$; время запаздывания $\tau = 0,95 \text{ сек}$; $\gamma = 0,03$; коэффициент передачи регулятора $k_p = 0,77 \text{ сек}^{-1}$; постоянные времени регулятора $T_1 = 12,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,48 \text{ сек}$.

Ответ. Частота среза разомкнутой системы $\omega_c = 0,6 \text{ сек}^{-1}$, запас устойчивости по фазе $\mu = 56^\circ$.

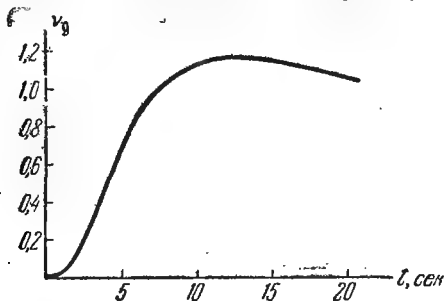


Рис. 201. Переходный процесс к задаче 345.

345. Построить при помощи вещественных частотных характеристик переходный процесс в системе, рассмотренной в предыдущей задаче, при подаче на вход системы возмущающего воздействия в виде единичной ступенчатой функции.

Ответ. График переходного процесса приведен на рис. 201.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 10.1. Дискретные функции и уравнения импульсных систем

346. Вычислить z -преобразование для функции времени

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

определенной для $t \geq 0$. Период дискретности $T_0 = 0,1$ сек. Значения коэффициентов: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ сек $^{-1}$ и $a_2 = 4$ сек $^{-2}$.

Решение. В соответствии с приложением 2 имеем

$$F(z) = \frac{a_0 z}{z-1} + \frac{a_1 T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{a_2 T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Подстановка числовых значений дает

$$F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{0,2z}{(z-1)^2} + \frac{0,04z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

347. Вычислить z -преобразование для функции времени, изображение Лапласа которой

$$L\{f(t)\} = \frac{K}{p(1+T_1 p)}.$$

Решение. Раскладываем изображение на простые дроби

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} = \frac{K}{p} - \frac{KT_1}{1+T_1 p}.$$

В соответствии с приложением 2 имеем

$$F(z) = \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-d} = \frac{K(1-d)z}{(z-1)(z-d)},$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T_1}}$, а T_0 — период дискретности.

348. Вычислить z -преобразование для функции времени, изображение Лапласа которой

$$L\{f(t)\} = \frac{K}{p^2(1+T_1 p)}.$$

Исходные данные: $K = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, период дискретности $T_0 = 0,5 \text{ сек}$.

Ответ.

$$F(z) = \frac{KT_0 z}{(z-1)^2} - \frac{KT_1 z}{z-1} + \frac{KT_1 z}{z-d} = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{0,2}{z-1} + \frac{0,2}{z-0,0067},$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T_1}} = e^{-5} = 0,0067$.

349. Вычислить z -преобразование функции времени

$$f(t) = A \sin \omega t = 10 \sin \omega t$$

в трех случаях:

$$1) \quad \omega = \frac{\pi}{4T_0};$$

$$2) \quad \omega = \frac{\pi}{2T_0};$$

$$3) \quad \omega = \frac{\pi}{T_0}.$$

Ответ.

$$1) \quad F(z) = \frac{7z}{z^2 - 1,4z + 1};$$

$$2) \quad F(z) = \frac{10z}{z^2 + 1};$$

$$3) \quad F(z) = 0.$$

350. Дано z -преобразование дискретной функции времени

$$F(z) = \frac{aT_0 z}{(z-1)^2},$$

где T_0 — период дискретности. Определить исходную функцию времени в точках $t = nT_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Решение. Деление числителя на знаменатель дает бесконечный ряд (ряд Лорана)

$$F(z) = aT_0 \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z} + \frac{3}{z} + \dots + \frac{n}{z^n} + \dots \right).$$

Отсюда можно получить

$$f(nT_0) = anT_0 = at|_{t=nT_0}.$$

351. Дано z -преобразование дискретной функции времени

$$F(z) = \frac{az}{(z-1+a)(z-1)}.$$

Разложением в ряд Лорана построить исходную функцию времени в точках $t = nT_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) для трех случаев:

- 1) $a = 1$, 2) $a = 1,8$ и 3) $a = 0,5$.

Ответ. Графики построены на рис. 202.

352. Дано z -преобразование дискретной функции времени

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5}. \quad (1)$$

Найти исходную решетчатую функцию времени разложением на простые дроби.

Рис. 202. Дискретные функции времени.

Решение. Находим корни уравнения

$$z^2 - 1,5z + 0,5 = 0.$$

Значение корней $z_1 = 1$ и $z_2 = 0,5$. Далее представляем $F(z)$ в виде суммы простых дробей

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} = 2 \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5} \right). \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) соответствует оригиналу $1(nT_0)$, а второе — e^{-anT_0} , причем $d = e^{-aT_0} = z_2$ (см. приложение 2). Поэтому можно записать для оригинала

$$f(nT_0) = 2[1(nT_0) - e^{-anT_0}] = 2(z_1^n - z_2^n) = 2(1 - 0,5^n).$$

353. Найти z -преобразование для функции времени

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

определенной при $t \geq 0$ в дискретные моменты времени $t = (n + \varepsilon) T_0$. Исходные данные: $a_0 = 1$, $a_1 = 2 \text{ сек}^{-1}$, $a_2 = 3 \text{ сек}^{-2}$, $T_0 = 1 \text{ сек}$, $\varepsilon = 0,5$.

Ответ.

$$F(z) = \frac{a_0 z}{z-1} + \frac{a_1 T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{a_1 \varepsilon T_0 z}{z-1} + \frac{2a_2 T_0^2 z}{(z-1)^3} + \\ + \frac{a_2 (1+2\varepsilon) T_0^2 z}{(z-1)^2} + \frac{a_2 \varepsilon^2 T_0^2 z}{(z-1)} = \frac{2,75z}{(z-1)} + \frac{8z}{(z-1)^2} + \frac{6z}{(z-1)^3}.$$

354. Найти w -преобразование функции времени

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

определенной для $t \geq 0$. Период дискретности $T_0 = 1 \text{ сек}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1 \text{ сек}^{-1}$ и $a_2 = 1 \text{ сек}^{-2}$.

Решение. В соответствии с приложением 2 находим z -преобразование исходной функции для дискретных моментов времени nT_0 ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$F(z) = \frac{a_0 z}{z-1} + \frac{a_1 T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{a_2 T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Используя подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$, получаем

$$F^*(w) = \frac{a_0 (1+w)}{2w} + \frac{a_1 T_0 (1-w^2)}{4w^2} + \frac{a_2 T_0^2 (1-w^2)}{4w^3} = \\ = \frac{1+w}{2w} + \frac{1-w^2}{4w^2} + \frac{1-w^2}{4w^3} = \frac{1+w+w^2+w^3}{4w^3}.$$

355. Дано w -преобразование дискретной функции времени

$$F^*(w) = \frac{a T_0^2 (1-w^2) w}{4w^3},$$

где $a = 5 \text{ сек}^{-2}$, а $T_0 = 1 \text{ сек}$.

Определить исходную дискретную функцию времени.

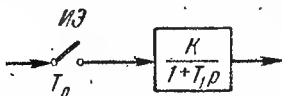
Решение. Используя подстановку $w = \frac{z-1}{z+1}$, находим z -преобразование функции времени:

$$F(z) = \frac{a T_0^2 \left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 \right]}{4 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3} = \frac{a T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

В соответствии с приложением 2 имеем

$$f(nT_0) = at^2|_{t=nT_0}.$$

356. На рис. 203 изображен импульсный фильтр. Импульсный элемент ИЭ генерирует прямоугольные импульсы относительной продолжительности γT_0 , где $\gamma = 0,05$, а период повторения $T_0 = 1$ сек. Передаточная функция непрерывной части



$$W_0 = \frac{K}{(1 + T_1 p)}, \quad (1)$$

Рис. 203. Импульсный фильтр к задаче 356. где $K = 10$, а $T_1 = 0,5$ сек.

Определить передаточную функцию фильтра совместно с импульсным элементом, считая, что последовательность импульсов на выходе импульсного элемента может быть заменена последовательностью δ -функций.

Решение. Передаточная функция равна

$$W(z) = \gamma T_0 \sum_{k=0}^{\infty} w_0(kT_0) z^{-k} = \gamma T_0 Z \{w_0(kT_0)\}. \quad (2)$$

Здесь $w_0(kT)$ — весовая функция непрерывной части $w_0(t)$ при замене $t = kT_0$, $z = e^{pT_0}$, а $Z \{w_0(kT_0)\}$ представляет z -преобразование весовой функции.

Для рассматриваемой непрерывной части весовая функция

$$w_0(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{1 + T_1 p} \right\} = \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (3)$$

В соответствии с приложением 2 находим

$$Z \left\{ \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right\} = \frac{K}{T_1} \cdot \frac{z}{z - d}, \quad (4)$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T_1}}$. В результате получаем искомую передаточную функцию

$$W(z) = \frac{\gamma K T_0}{T_1} \cdot \frac{z}{z - d}. \quad (5)$$

После подстановки числовых значений имеем

$$W(z) = \frac{0,05 \cdot 10 \cdot 1}{0,5} \cdot \frac{z}{z - e^{-2}} = \frac{z}{z - 0,135}. \quad (6)$$

357. Построить амплитудно-фазовую частотную характеристику для импульсного фильтра, приведенного в предыдущей задаче.

Решение. В выражении (6) предыдущей задачи необходимо сделать подстановку $z = e^{j\omega T_0} = \cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0$. В результате получается частотная передаточная функция фильтра

$$W(e^{j\omega T_0}) = \frac{e^{j\omega T_0}}{e^{j\omega T_0} - 0,135} = \frac{\cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0}{\cos \omega T_0 - 0,135 + j \sin \omega T_0}.$$

Модуль этого выражения

$$|W(e^{j\omega T_0})| = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,135^2 - 0,27 \cos \omega T_0}},$$

и фаза

$$\psi = \omega T_0 - \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega T_0}{\cos \omega T_0 - d}.$$

А. ф. х. представляет собой окружность (рис. 204). При $\omega = 0$, а также при $\omega T_0 = 2n\pi$, где n — натуральное число, модуль и фаза составляют

$$A_0 = \frac{1}{1-d} = \frac{1}{1-0,135} = 1,15$$

$$\psi_0 = 0.$$

При $\omega T_0 = (2n-1)\pi$ модуль и фаза

$$A_1 = \frac{1}{1+d} = \frac{1}{1+0,135} = 0,88$$

$$\psi = \pm 180^\circ.$$

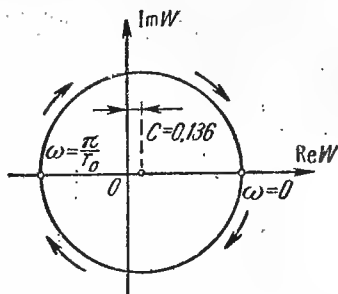


Рис. 204. А. ф. х. к задаче 357.

Центр окружности смещен вправо от начала координат на величину $C = \frac{d}{1-d^2} = 0,136$, $R = \frac{1}{1-d^2} = 1,01$.

358. Найти частотную передаточную функцию импульсного фильтра задачи 356 (см. рис. 203) в зависимости от абсолютной псевдочастоты.

Решение. В передаточной функции (6) задачи 356 перейдем к ω -преобразованию посредством подстановки $z = \frac{1+w}{1-w}$.

В результате имеем

$$W(w) = \frac{\gamma K T_0}{T_1} \cdot \frac{1+w}{1-d+(1+d)w} = \frac{\gamma K T_0}{T_1(1-d)} \cdot \frac{1+w}{1+w \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1}}. \quad (1)$$

Перейдем к абсолютной псевдочастоте $\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}$ посредством подстановки $w = j \frac{T_0}{2} \lambda$:

$$W(j\lambda) = \frac{\gamma K T_0}{T_1(1-d)} \cdot \frac{1+j \frac{T_0}{2} \lambda}{1+j T_0 \lambda}. \quad (2)$$

Здесь введена эквивалентная постоянная времени

$$T_0 = \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1}. \quad (3)$$

Подстановка числовых значений дает $T_0 = 0,5 \operatorname{cth} 1 = 0,66$ сек. Передаточная функция равна

$$W(j\lambda) = \frac{0,05 \cdot 10 \cdot 1}{0,5(1-0,135)} \cdot \frac{1+j0,5\lambda}{1+j0,66\lambda} = \frac{1,15(1+j0,5\lambda)}{1+j0,66\lambda}.$$

359. Решить задачу 356 при условии, что относительная продолжительность импульса $\gamma = 0,5$.

Решение. В рассматриваемом случае изображение Лапласа импульса, генерируемого импульсным элементом при подаче на его вход единичного сигнала, будет равно

$$F_n(p) = \int_0^{\gamma T_0} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-p\gamma T_0}}{p}.$$

Приведенная передаточная функция непрерывной части

$$W_n(p) = W_0(p) F_n(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)} (1 - e^{-p\gamma T_0}).$$

Дискретная передаточная функция

$$W(z) = Z \left\{ \frac{K}{p(1+T_1 p)} (1 - e^{-p\gamma T_0}) \right\}.$$

В соответствии с приложением 2 находим

$$W(z) = \frac{K(1-d)z}{(z-1)(z-d)} - \frac{K}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{zd^\sigma}{z-d} \right) = \frac{Kd(d^{-\gamma}-1)}{z-d}, \quad (4)$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T_1}} = 0,135$, а $\sigma = 1 - \gamma$.

Подстановка числовых значений дает

$$W(z) = \frac{2,32}{z-0,135}. \quad (5)$$

360. Для импульсного фильтра, изображенного на рис. 205, построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики. Передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)}.$$

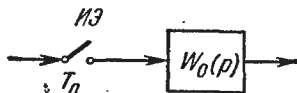


Рис. 205. Импульсный фильтр к задаче 360.

Исходные данные: $K = 100 \text{ сек}^{-1}$, $T_0 = 0,05 \text{ сек}$, $T_1 = 0,2 \text{ сек}$ и $\gamma = 0,1$. Считать, что последовательность импульсов на выходе импульсного элемента ИЭ может быть заменена последовательностью δ -функций.

Решение. Дискретная передаточная функция импульсного фильтра равна

$$W(z) = \gamma T_0 Z \{W_0(p)\} = \gamma T_0 Z \left\{ \frac{K}{p(1+T_1 p)} \right\}. \quad (1)$$

В соответствии с приложением 2 находим

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{K}{p(1+T_1 p)} \right\} &= Z \left\{ \frac{K}{p} - \frac{KT_1}{1+T_1 p} \right\} = \\ &= K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-d} \right) = \frac{K(1-d)z}{(z-1)(z-d)}. \end{aligned} \quad (2)$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T_1}} = e^{-0,25} = 0,78$. Подставляя (2) в (1), имеем

$$W(z) = \frac{\gamma T_0 K (1-d) z}{(z-1)(z-d)}. \quad (3)$$

Используем подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$:

$$W(w) = \frac{\gamma T_0 K (1-w^2)}{2w \left(1 + w \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1}\right)}. \quad (4)$$

Переходим к абсолютной псевдочастоте подстановкой $w = j \frac{T_0}{2} \lambda$

$$W(j\lambda) = \frac{\gamma K \left(1 + \lambda^2 \frac{T_0^2}{4}\right)}{j\lambda (1 + j\lambda T_0)}. \quad (5)$$

Здесь $T_0 = \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1} = \frac{T_0}{2 \operatorname{th} \frac{T_0}{2T_1}} = \frac{0,5}{2 \cdot 0,115} = 0,217 \text{ сек.}$

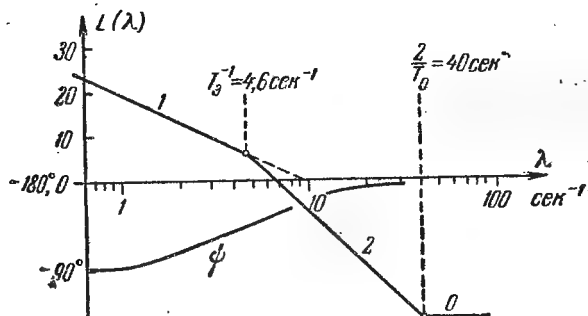


Рис. 206. Л. а. х. и л. ф. х. к задаче 360.

Подстановка числовых значений дает

$$W(j\lambda) = \frac{10 (1 + 0,025\lambda^2)}{j\lambda (1 + j0,217\lambda)}. \quad (6)$$

Логарифмические амплитудная и фазовая характеристики должны строиться по выражению

$$L(\lambda) = 20 \lg |W(j\lambda)| = 20 \lg \frac{10 [1 + (0,025)^2 \lambda^2]}{\lambda \sqrt{1 + 0,217^2 \lambda^2}},$$

$$\psi(\lambda) = \arg W(j\lambda) = -90^\circ - \operatorname{arctg} 0,217\lambda.$$

Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. построены на рис. 206.

361. Построить логарифмические амплитудную и фазовые характеристики для импульсного фильтра, изображенного на рис. 205, если передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}. \quad (1)$$

Исходные данные: $K = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_0 = 0,1 \text{ сек}$, $T_1 = 0,25 \text{ сек}$, $T_2 = 0,01 \text{ сек}$ и $\gamma = 0,01$. Считать, что последовательность импульсов на выходе импульсного элемента может быть заменена последовательностью δ -функций.

Решение. Разложим выражение (1) на простые дроби:

$$\frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{K}{p} - \frac{KT_1^2}{(T_1-T_2)(1+T_1p)} + \frac{KT_2^2}{(T_1-T_2)(1+T_2p)}. \quad (2)$$

В соответствии с приложением 2 находим дискретную передаточную функцию

$$W(z) = \gamma T_0 K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{az}{T_1(z-d_1)} + \frac{bz}{T_2(z-d_2)} \right), \quad (3)$$

где

$$a = \frac{T_1^2}{T_1-T_2} \approx T_1, \quad b = \frac{T_2^2}{T_1-T_2} \approx \frac{T_2^2}{T_1},$$

$$d_1 = e^{-\frac{T_0}{T_1}} \quad \text{и} \quad d_2 = e^{-\frac{T_0}{T_2}}.$$

Формула (3) может быть представлена в виде

$$W(z) \approx \gamma T_0 K \left[\frac{(1-d_1)z}{(z-1)(z-d_1)} + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{z}{(z-d_2)} \right]. \quad (4)$$

Используем подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$,

$$W(w) = \gamma T_0 K \left[\frac{1-w^2}{2w \left(1 + w \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1} \right)} + \frac{T_2}{T_1(1-d_2)} \frac{1+w}{1 + w \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_2}} \right].$$

Перейдем к абсолютной псевдочастоте заменой $\omega = j \frac{T_0}{2} \lambda$. В результате имеем

$$W(j\lambda) = \gamma T_0 K \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \right) \left[\frac{1 - j\lambda \frac{T_0}{2}}{j\lambda T_0 \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1} \right)} + \frac{T_2}{T_1 (1 - d_2) \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_2} \right)} \right].$$

Так как $T_0 < 2T_1$ и $T_0 > 2T_2$, то $\frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1} \approx T_1$, $\operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_1} \approx 1$ и $d_2 \approx 0$.

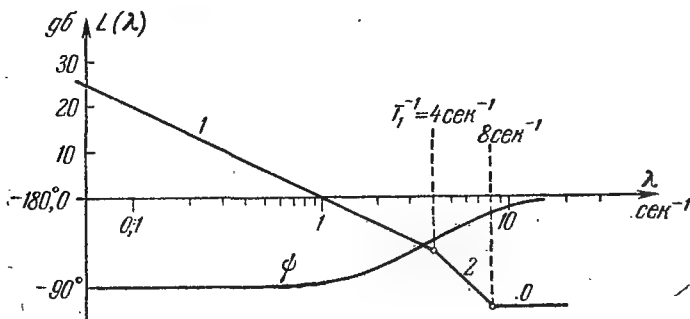


Рис. 207. Л. а. х. и л. ф. х. к задаче 361.

При учете этих зависимостей получаем

$$W(j\lambda) = \gamma T_0 K \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \right) \left[\frac{1 - j\lambda \frac{T_0}{2}}{j\lambda T_0 (1 + j\lambda T_1)} + \frac{T_2}{T_1 \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \right)} \right] =$$

$$= \frac{\gamma K \left[1 + j\lambda \frac{T_2}{T_1} T_0 + (j\lambda)^2 \left(T_2 T_0 - \frac{T_0^2}{4} \right) \right]}{j\lambda (1 + j\lambda T_1)}. \quad (5)$$

Подстановка числовых значений дает

$$W(j\lambda) = \frac{[1 + j0,004\lambda - 0,015(j\lambda)^2]}{j\lambda (1 + j0,25\lambda)} \approx$$

$$\approx \frac{1 + 0,015\lambda^2}{j\lambda (1 + j0,25\lambda)} = \frac{(1 + j0,122\lambda)(1 - j0,122\lambda)}{j\lambda (1 + j0,25\lambda)}.$$

Асимптотические л. а. х. и л. ф. х. изображены на рис. 207.

362. Импульсной системе регулирования (рис. 208) соответствует передаточная функция разомкнутой системы (см. задачу 360)

$$W(z) = \frac{\gamma T_0 K (1-d) z}{(z-1)(z-d)} = \frac{0,11z}{(z-1)(z-0,78)}, \quad (1)$$

где $K = 100 \text{ сек}^{-1}$, $T_0 = 0,05 \text{ сек}$, $T_1 = 0,2 \text{ сек}$, $\gamma = 0,1$ и $d = e^{-\frac{T_0}{T_1}} = e^{-0,25} = 0,78$.

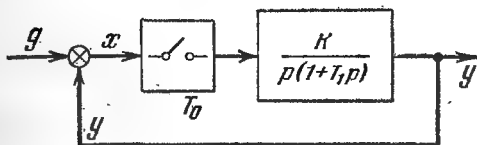


Рис. 208. Импульсная система регулирования.

Определить передаточную функцию замкнутой системы и передаточную функцию относительно ошибки.

Ответ. Передаточная функция замкнутой системы

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{\gamma T_0 K (1-d) z}{(z-1)(z-d) + \gamma T_0 K (1-d) z} = \\ &= \frac{0,11z}{(z-1)(z-0,78) + 0,11z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Передаточная функция по ошибке

$$\begin{aligned} \Phi_x(z) &= \frac{1}{1+W(z)} = \frac{(z-1)(z-d)}{(z-1)(z-d) + \gamma T_0 K (1-d) z} = \\ &= \frac{(z-1)(z-0,78)}{(z-1)(z-d) + 0,11z}. \end{aligned} \quad (3)$$

363. Передаточная функция замкнутой импульсной системы (см. рис. 208)

$$\Phi(z) = \frac{0,11z}{(z-1)(z-0,78) + 0,11z}.$$

На вход системы поступает ступенчатая функция $g(t) = g_0 1(t)$. Найти z -преобразование выходной величины $Y(z)$ и ошибки $X(z)$.

Решение. Изображение входной величины в соответствии с приложением 2 будет равно

$$G(z) = \frac{g_0 z}{z - 1}.$$

Изображение выходной величины

$$Y(z) = \Phi_x(z) G(z) = \frac{0,11 g_0 z^2}{[(z - 1)(z - 0,78) + 0,11z](z - 1)}.$$

Изображение ошибки

$$\begin{aligned} X(z) &= \Phi_x(z) G(z) = [1 - \Phi(z)] G(z) = \\ &= \frac{g_0(z - 0,78)z}{(z - 1)(z - 0,78) + 0,11z}. \end{aligned}$$

364. Найти разностное уравнение, связывающее входную и выходную величину импульсной системы регулирования (см. рис. 208).

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{0,11z}{(z - 1)(z - 0,78) + 0,11z}.$$

Решение. Изображения входной и выходной величин связаны передаточной функцией

$$\begin{aligned} Y(z) &= \Phi(z) G(z) = \frac{0,11zG(z)}{(z - 1)(z - 0,78) + 0,11z} = \\ &= \frac{0,11zG(z)}{z^2 - 1,67z + 0,78} = \frac{0,11z^{-1}G(z)}{1 - 1,67z^{-1} + 0,78z^{-2}}. \end{aligned}$$

Перепишем эту формулу в ином виде:

$$(1 - 1,67z^{-1} + 0,78z^{-2})Y(z) = 0,11z^{-1}G(z).$$

Отсюда может быть получено разностное уравнение

$$y[n] - 1,67y[n - 1] + 0,78y[n - 2] = 0,11g[n - 1].$$

§ 10.2. Устойчивость и качество импульсных систем

365. Передаточная функция замкнутой импульсной системы регулирования

$$\Phi(z) = \frac{0,11z}{z^2 - 1,67z + 0,78}.$$

Определить устойчивость системы.

Решение. Характеристическое уравнение системы

$$z^2 - 1,67z + 0,78 = 0.$$

Находим корни

$$z_{1,2} = 0,835 \pm \sqrt{0,835^2 - 0,78} = 0,835 \pm j0,292.$$

Модуль корней

$$|z_{1,2}| = \sqrt{0,835^2 + 0,292^2} = 0,88 < 1.$$

Система устойчива.

366. Определить наибольшее значение общего коэффициента усиления для системы импульсного регулирования, рассмотренной в задаче 362, соответствующее границе устойчивости.

Решение. Характеристическое уравнение системы может быть получено из формулы (2) задачи 362:

$$\begin{aligned} (z-1)(z-d) + \gamma T_0 K (1-d) z = \\ = z^2 - [1+d - \gamma T_0 K (1-d)] z + d = 0. \end{aligned}$$

Перейдем к w -преобразованию подстановкой $z = \frac{1+w}{1-w}$. В результате получим характеристическое уравнение в другом виде,

$$[2 + 2d - \gamma T_0 K (1-d)] w^2 + 2(1-d)w + \gamma T_0 K (1-d) = 0.$$

Условия устойчивости:

$$2 + 2d - \gamma T_0 K (1-d) > 0, \quad (1)$$

$$d < 1, \quad (2)$$

$$\gamma T_0 K (1-d) > 0. \quad (3)$$

Критическое значение коэффициента усиления может быть определено из формулы (1)

$$K_{кр} = \frac{2(1+d)}{\gamma T_0 (1-d)} = \frac{3,56}{0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,22} = 3240 \text{ сек}^{-1}.$$

367. Характеристическое уравнение импульсной системы регулирования

$$5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0.$$

Определить устойчивость системы.

Решение. Используем подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$.

Тогда получим

$$5(1+w)^3 + 2(1+w)^2(1-w) + 3(1+w)(1-w)^2 + (1-w)^3 = 0.$$

Приведение подобных членов дает

$$5w^3 + 13w^2 + 11w + 11 = 0.$$

Применим критерий Гурвица

$$13 \cdot 11 - 5 \cdot 11 = 88 > 0.$$

Система устойчива.

368. Определить устойчивость системы, характеристическое уравнение которой

$$z^2 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Ответ. Система неустойчива.

369. Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{0,1}{z^2 - 1,5z + 0,6}.$$

Определить первые коэффициенты ошибки c_0 и c_1 при $T_0 = 0,1$ сек.

Решение. Находим передаточную функцию относительно ошибки:

$$\Phi_x(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{z^2 - 1,5z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,6}.$$

Заменяя в последнем выражении $z = 1$, что соответствует $p = 0$, получаем

$$c_0 = \Phi_x(1) = 0.$$

Для нахождения коэффициента ошибки c_1 продифференцируем передаточную функцию $\Phi_x(e^{pT_0})$:

$$\frac{d\Phi_x(e^{pT_0})}{dp} = \frac{(2T_0z - 1,5T_0) 0,1}{(z^2 - 1,5z + 0,6)^2}.$$

При подстановке в последнее выражение $z=1$ получаем

$$c_1 = \frac{(2T_0 - 1,5T_0) 0,1}{(1 - 1,5 + 0,6)^2} = 5T_0 = 0,5 \text{ сек.}$$

370. В импульсной системе регулирования коэффициенты ошибки равны $c_0=0$, $c_1=0,01 \text{ сек}$ и $c_2=0,05 \text{ сек}^2$. Определить ошибку в дискретные моменты времени $t = nT_0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) при поступлении на вход системы сигнала $g(t) = a_0 t + a_1 t^2$, где $a_0 = 5 \text{ сек}^{-1}$ и $a_1 = 2 \text{ сек}^{-2}$.

Ответ. Значение ошибки в дискретные моменты времени равно

$$\begin{aligned} x(nT_0) &= c_1 \dot{g}(nT_0) + \frac{c_2}{2} \ddot{g}(nT_0) = \\ &= c_1 (a_0 + 2a_1 nT_0) + \frac{c_2}{2} \cdot 2a_1 = \\ &= 0,01 (5 + 4nT_0) + 0,05 \cdot 2 = 0,15 + 0,04nT_0. \end{aligned}$$

371. Определить запас устойчивости по модулю и по фазе, а также показатель колебательности импульсной системы регулирования, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии приведена в задаче 362

$$W(z) = \frac{\gamma T_0 K (1-d)z}{(z-1)(z-d)},$$

где $\gamma=0,1$, $T_0=0,05 \text{ сек}$, $K=100 \text{ сек}^{-1}$, $d=e^{-\frac{T_0}{T_1}} = e^{-0,25} = 0,78$, а $T_1=0,2 \text{ сек}$.

Решение. Перейдем к частотной передаточной функции подстановкой $z = \frac{1+w}{1-w}$, а затем $w = j\lambda \frac{T_0}{2}$ (см. задачу 360),

$$W(j\lambda) = \frac{10 [1 + 0,025^2 \lambda^2]}{j\lambda (1 + j0,217\lambda)}. \quad (1)$$

Определим частоту среза для передаточной функции (1) из равенства

$$\frac{10 [1 + 0,025^2 \lambda_{\text{ср}}^2]}{\lambda_{\text{ср}} \sqrt{1 + 0,217^2 \lambda_{\text{ср}}^2}} = 1. \quad (2)$$

Приближенное решение (2) дает

$$\lambda_{\text{ср}} \approx \sqrt{\frac{10}{0,217}} = 6,8 \text{ сек}^{-1}.$$

Запас по фазе для (1) равен

$$\mu = 180^\circ + \psi = 90^\circ - \operatorname{arctg} 0,217\lambda.$$

Запас устойчивости по фазе при $\lambda = \lambda_{\text{ср}}$ равен

$$\mu_1 = 90^\circ - \operatorname{arctg} 0,217 \cdot 6,8 = 34^\circ.$$

Фазовый сдвиг достигает значения $\psi = -180^\circ$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому запас устойчивости по модулю

$$\beta = \frac{1}{|W(j\infty)|} = \frac{0,217}{10 \cdot 0,025^2} \approx 35.$$

Для определения показателя колебательности найдем частотную передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(j\lambda) = \frac{W(j\lambda)}{1 + W(j\lambda)} = \frac{10(1 + 0,025^2\lambda^2)}{-0,217\lambda^2 + j\lambda + 10}.$$

Модуль последнего выражения равен

$$A(\lambda) = \frac{10(1 + 0,025\lambda^2)}{\sqrt{(10 - 0,217\lambda^2)^2 + \lambda^2}}. \quad (3)$$

Исследование на максимум выражения (3) дает значение показателя колебательности $A_{\text{max}} = M = 1,56$.

372. На вход импульсной системы с передаточной функцией в замкнутом состоянии

$$\Phi(z) = \frac{0,1}{z^2 - 1,3z + 0,4}$$

поступает единичная ступенчатая функция $g(t) = 1(t)$. Построить переходный процесс для выходной величины $y(nT)$ и определить время переходного процесса. Период дискретности $T_0 = 1 \text{ сек}$.

Решение. Изображение входной величины равно

$$G(z) = \frac{z}{z-1}. \quad (1)$$

Изображение выходной величины примет вид

$$Y(z) = \Phi(z) G(z) = \frac{0,1z}{(z-1)(z^2-1,3z+0,4)}. \quad (2)$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$z^2 - 1,3z + 0,4 = 0.$$

Решение дает $z_1 = 0,8$ и $z_2 = 0,5$.

Представим выражение (2) в виде

$$Y(z) = \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,8} + \frac{C}{z-0,5} \right).$$

Нахождение коэффициентов разложения на простые дроби дает $A=1$, $B=-1,67$ и $C=0,67$. В результате имеем

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1,67z}{z-0,8} + \frac{0,67z}{z-0,5}. \quad (3)$$

Для приведения (3) к табличному виду (см. приложение 2) положим $d_1 = e^{-a_1 T_0} = z_1 = 0,8$ и $d_2 = e^{-a_2 T_0} = z_2 = 0,5$. Отсюда находим

$$a_1 = \frac{1}{T_0} \ln \frac{1}{0,8} = 1 \cdot 0,223 = 0,223 \text{ сек}^{-1},$$

$$a_2 = \frac{1}{T_0} \ln \frac{1}{0,5} = 1 \cdot 0,693 = 0,693 \text{ сек}^{-1}.$$

Таблица 1

n	$-1,67 \cdot 0,8^n$	$0,67 \cdot 0,5^n$	$y(nT_0)$	n	$-1,67 \cdot 0,8^n$	$0,67 \cdot 0,5^n$	$y(nT_0)$
0	-1,67	0,67	0	9	-0,22	0	0,78
1	-1,33	0,33	0	10	-0,18	0	0,82
2	-1,06	0,16	0,1	11	-0,14	0	0,85
3	-0,85	0,08	0,23	12	-0,11	0	0,89
4	-0,68	0,04	0,36	13	-0,09	0	0,91
5	-0,54	0,02	0,48	14	-0,07	0	0,93
6	-0,43	0,01	0,58	15	-0,06	0	0,94
7	-0,35	0	0,65	16	-0,05	0	0,95
8	-0,28	0	0,72				

В соответствии с приложением 2 получаем искомую дискретную функцию времени

$$y(nT_0) = 1 - 1,67e^{-a_1 n T_0} + 0,67e^{-a_2 n T_0} = \\ = 1 - 1,67z_1^n + 0,67z_2^n = 1 - 1,67 \cdot 0,8^n + 0,67 \cdot 0,5^n. \quad (4)$$

Для построения переходного процесса удобно воспользоваться табл. 1.

Вычисление $y(nT_0)$ производилось в таблице до тех пор, пока ошибка не стала равной 5%. Время переходного процесса составляет при этом $t_n = 16T_0 = 16 \text{ сек.}$

373. Решить предыдущую задачу разложением изображения в ряд Лорана.

Решение. Найденное изображение выходной величины (2) разложим в ряд Лорана делением числителя на знаменатель

$$\begin{array}{r} 0,1z \\ 0,1z - 0,23 + 0,17z^{-1} - 0,04z^{-2} \\ \hline 0,23 - 0,17z^{-1} + 0,04z^{-2} \\ 0,23 - 0,53z^{-1} + 0,39z^{-2} - 0,092z^{-3} \\ \hline 0,36z^{-1} - 0,35z^{-2} + 0,092z^{-3} \end{array} \quad \left| \frac{z^3 - 2,3z^2 + 1,7z - 0,4}{0,1z^{-2} + 0,23z^{-3} + 0,36z^{-4} + \dots} \right.$$

Коэффициенты при z^{-n} у частного представляют собой значение выходной величины $y(nT_0)$. Таким образом, при $n=0$ и $n=1$ имеем $y(0) = y(T_0) = 0$. Далее получаем $y(2T_0) = 0,1$, $y(3T_0) = 0,23$, $y(4T_0) = 0,36$. Продолжая деление дальше, получим числа, совпадающие с приведенными в табл. 1.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА II

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 11.1. Уравнения нелинейных следящих систем

374. Составить дифференциальные уравнения и структурную схему электромеханической следящей системы, схема которой изображена на рис. 209. На схеме обозначено: ϑ_1 , ϑ_2 — углы поворота командной и исполнительной осей, $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ — рассогласование (ошибка),

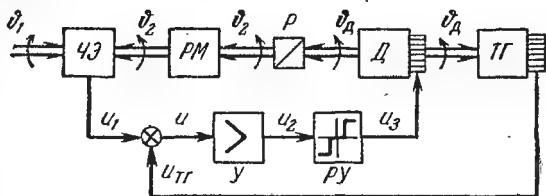


Рис. 209. Электромеханическая следящая система.

ЧЗ — чувствительный элемент (датчик угла рассогласования), У — линейный усилитель, РУ — релейный усилитель, Д — двигатель, Р — редуктор, ТГ — тахогенератор, РМ — рабочий механизм (объект).

Исходные данные: крутизна статической характеристики чувствительного элемента $k_1 = 1 \text{ в/град} = 57,3 \text{ в/рад}$, коэффициент усиления линейного усилителя $k_2 = 2,5$, постоянная времени линейного усилителя $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, максимальное напряжение на выходе релейного усилителя

$U_{3 \max} = c = 110$ в, крутизна статической характеристики тахогенератора $k_4 = 10^{-2} \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{рад}}$, передаточное отношение редуктора $i = 1000$, скорость холостого хода двигателя $n_0 = 6000$ об/мин, пусковой момент двигателя $M_0 = 100 \text{ Г} \cdot \text{см}$, момент инерции всех вращающихся частей, приведенный к валу двигателя, $J = 0,008 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$. Влиянием статического момента нагрузки и переходных процессов в цепи якоря двигателя можно пренебречь. Статическая характеристика релейного усилителя изображена на рис. 210. Зона нечувствительности $b = 0,25$ в.

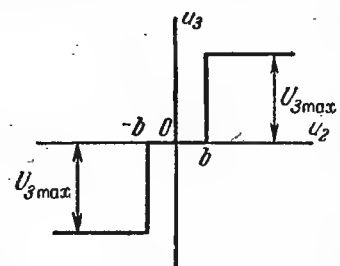


Рис. 210. Статическая характеристика релейного усилителя.

Решение. По заданной принципиальной схеме составляем дифференциальные уравнения звеньев системы.

1. Уравнение чувствительного элемента

$$u_1 = k_1 \vartheta, \quad \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2, \quad (1)$$

где u_1 — напряжение на выходе чувствительного элемента.

2. Уравнение релейного усилителя

$$(T_1 p + 1) u_2 = k_2 u, \quad u = u_1 - u_{\text{т}}, \quad (2)$$

где u_2 — напряжение на выходе усилителя, $u_{\text{т}}$ — напряжение тахогенератора, $p = \frac{d}{dt}$.

3. Уравнение релейного усилителя запишем в следующем виде:

$$u_3 = F(u_2), \quad (3)$$

где u_3 — напряжение на выходе усилителя, $F(u_2)$ — нелинейная функция, заданная статической характеристикой (см. рис. 210).

4. Уравнение исполнительного двигателя.

Согласно исходным данным влиянием статического момента нагрузки и переходных процессов в цепи якоря двигателя можно пренебречь. Поэтому дифференциальное

уравнение двигателя (см. гл. I) можно записать в виде

$$(T_m p + 1) p \vartheta_d = k_3 u_3, \quad (4)$$

где ϑ_d — угол поворота вала двигателя, T_m — электро-механическая постоянная времени, k_3 — коэффициент передачи двигателя.

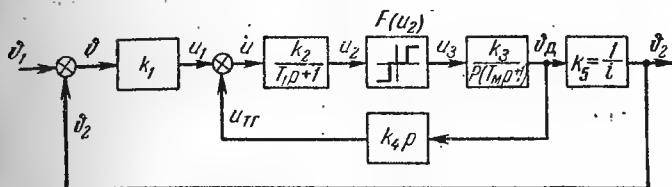


Рис. 211. Структурная схема следящей системы.

Электро-механическая постоянная времени двигателя (см. гл. I)

$$T_m = J \frac{\Omega_0}{M_0} = J \frac{\pi n_0}{30 M_0} = 0,008 \frac{3,14 \cdot 6000}{30 \cdot 100} \approx 0,05 \text{ сек.}$$

Коэффициент передачи двигателя

$$k_3 = \frac{\Omega_0}{U_{3 \text{ max}}} = \frac{\pi n_0}{30 U_{3 \text{ max}}} = \frac{3,14 \cdot 6000}{30 \cdot 110} \approx 5,73 \frac{\text{рад}}{\text{в} \cdot \text{сек}}.$$

5. Уравнение тахогенератора

$$u_{тг} = k_4 p \vartheta_d. \quad (5)$$

6. Уравнение редуктора

$$\vartheta_2 = k_5 \vartheta_d, \quad (6)$$

где $k_5 = \frac{1}{i} = \frac{1}{1000} = 0,001$ — коэффициент передачи редуктора.

По уравнениям (1)–(6) составляем структурную схему системы (рис. 211). Согласно этой схеме дифференциальное уравнение линейной части системы, записанное относительно входной величины нелинейного звена u_2 , имеет вид

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1)(T_m p + 1) p u_2 = \\ = k_1 k_2 (T_m p + 1) p \vartheta_1 - k_2 k_3 (k_1 k_5 + k_4 p) u_3. \end{aligned} \quad (7)$$

приведенный к той же оси, $J = 100 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$; параметры логического устройства (пересчитанные в угол рассогласования и угловую скорость) $b_1 = 0,2^\circ$, $b_2 = 0,1 \text{ град/сек}$. Статическим моментом нагрузки и влиянием переходных процессов в электромагнитных муфтах трения можно пренебречь.

Решение. Запишем закон равновесия моментов, приведенных к исполнительной оси (статическим моментом нагрузки пренебрегаем):

$$J \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где M — вращающий момент.

Уравнение управляющего устройства, включающего чувствительный элемент, тахогенератор, логическое устройство и электромагнитные муфты трения, имеет вид

$$M = M_0 \Phi(\vartheta, \dot{\vartheta}_2), \quad (2)$$

где $\Phi(\vartheta, \dot{\vartheta}_2)$ — нелинейный логический закон, реализуемый в управляющем устройстве и заданный графически на рис. 213. Из уравнений (1) и (2) и рис. 213 следует

$$J \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} = \begin{cases} M_0 & \text{при } \vartheta < -b_1, \quad \dot{\vartheta}_2 < b_2, \\ -M_0 & \text{при } \vartheta > b_1, \quad \dot{\vartheta}_2 > -b_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Подставим в уравнения (3) численные значения параметров системы. Получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \begin{cases} 0,1 & \text{при } \vartheta < -0,2^\circ, \quad \dot{\vartheta}_2 < 0,1 \text{ град/сек}, \\ 0,1 & \text{при } \vartheta > 0,2^\circ, \quad \dot{\vartheta}_2 > -0,1 \text{ град/сек}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

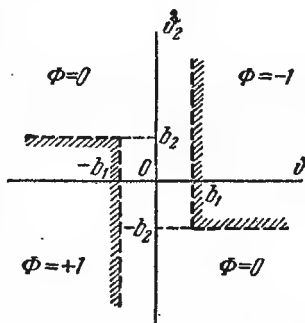


Рис. 213. Статическая характеристика логического устройства.

376. Составить дифференциальные уравнения и структурную схему следящей системы с переменным демпфи-

рованием (рис. 214). На схеме обозначено: ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота командной и исполнительной осей, $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ — угол рассогласования (ошибка), ЧЭ — чувствительный элемент (датчик угла рассогласования), РМ — рабочий механизм, У₁, У₂ — усилители, ТГ₁, ТГ₂ — тахогенераторы, Д — двигатель, Р — редуктор.

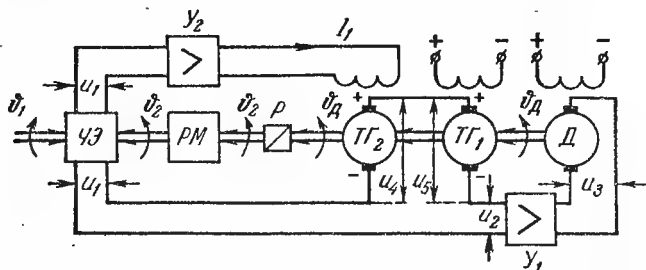


Рис. 214. Следящая система с переменным демпфированием.

Местная обратная связь в этой системе образуется тахогенераторами ТГ₁ и ТГ₂, которые включены последовательно и встречно. Разность напряжений этих тахогенераторов $u_4 - u_5$ складывается с напряжением u_1 , снимаемым с чувствительного элемента. При большом угле рассогласования ϑ напряжение $u_4 > u_5$, так как ток в обмотке возбуждения тахогенератора ТГ₂ пропорционален углу ϑ . Поэтому суммарный сигнал на входе усилителя У₁ $u_2 > u_1$, что обеспечивает большую скорость нарастания процесса. При малом угле рассогласования $u_4 < u_5$ и напряжение на входе усилителя У₁ $u_2 < u_1$. Поэтому система работает с пониженной скоростью, что исключает перерегулирование. При составлении уравнений системы статическим моментом нагрузки и влиянием переходных процессов в цепи якоря двигателя и в обмотке возбуждения тахогенератора ТГ₂ можно пренебречь. Усилители У₁ и У₂ считаются безинерционными.

Решение. Составляем дифференциальные уравнения звеньев системы.

1. Уравнение чувствительного элемента

$$u_1 = k_1 \vartheta, \quad \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2, \quad (1)$$

где k_1 — крутизна статической характеристики чувствительного элемента.

2. Уравнение усилителя U_1

$$u_3 = k_2 u_2, \quad u_2 = u_1 + u_4 - u_5, \quad (2)$$

где u_3 — напряжение на выходе усилителя; k_2 — коэффициент усиления.

3. Уравнение двигателя

$$(T_m p + 1) p \vartheta_d = k_3 u_3, \quad (3)$$

где ϑ_d — угол поворота вала двигателя, T_m и k_3 — электро-механическая постоянная времени и коэффициент передачи двигателя.

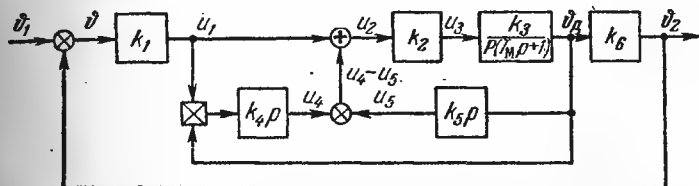


Рис. 215. Структурная схема следящей системы с переменным демпфированием.

4. Уравнение цепи нелинейной обратной связи, состоящей из тахогенератора $ТГ_2$ и усилителя U_2 ,

$$u_4 = k_4 p u_1 \vartheta_d, \quad (4)$$

где k_4 — коэффициент пропорциональности.

5. Уравнение тахогенератора $ТГ_1$

$$u_5 = k_5 p \vartheta_d, \quad (5)$$

где k_5 — крутизна статической характеристики тахогенератора.

6. Уравнение редуктора

$$\vartheta_2 = k_6 \vartheta_d, \quad (6)$$

где k_6 — коэффициент передачи редуктора.

По уравнениям (1) — (6) составляем структурную схему системы (рис. 215). На этой схеме знаком $\otimes$

обозначено множительное устройство, выполняющее операцию умножения двух переменных согласно уравнению (4).

В соответствии со структурной схемой нелинейное дифференциальное уравнение всей системы имеет вид

$$[T_M p^2 + (1 + k_2 k_3 k_5) p + k_1 k_2 k_3 k_6] \vartheta_2 -$$

$$- k_1 k_2 k_3 k_4 p (\vartheta_1 - \vartheta_2) \vartheta_2 = k_1 k_2 k_3 k_6 \vartheta_1. \quad (7)$$

§ 11.2. Уравнения нелинейных систем стабилизации

377. Составить дифференциальные уравнения и структурную схему системы автоматического регулирования температуры, схема которой изображена на рис. 216.

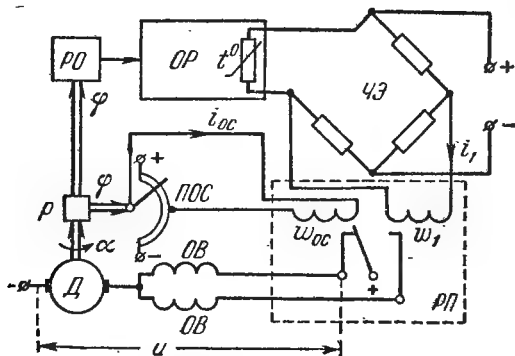


Рис. 216. Система автоматического регулирования температуры.

На схеме обозначено: *ОР* — объект регулирования, *ЧЭ* — чувствительный элемент (мост с термосопротивлением), *РП* — поляризованное реле (усилитель), *Д* — двигатель, *ОВ* — обмотки возбуждения двигателя, *Р* — редуктор, *РО* — регулирующий орган (заслонка), *ПОС* — потенциометр обратной связи.

Исходные данные: объект представляет собой апериодическое звено первого порядка с постоянной времени $T_0 = 10$ сек, коэффициент передачи объекта и регулирующего органа $k_0 = 10$ град/рад, коэффициент передачи

чувствительного элемента $k_1 = 0,25 \text{ а-в/град}$, коэффициент передачи двигателя $k_2 = 2 \text{ рад/в} \cdot \text{сек}$, передаточное отношение редуктора $i = 1000$, коэффициент передачи цепи обратной связи $k_{oc} = 2,5 \text{ а-в/рад}$. Статическая характеристика поляризованного реле изображена на рис. 217. Ампер-витки срабатывания реле $a\omega_{cp} = 0,5 \text{ а-в}$, максимальное напряжение на выходе релейного усилителя $U_{max} = 110 \text{ в}$. Влиянием статического момента нагрузки, переходных процессов в обмотках поляризованного реле и постоянными времени двигателя T_a и T_m можно пренебречь.

Решение. По заданной принципиальной схеме составляем дифференциальные уравнения звеньев системы.

1. Уравнение регулируемого объекта

$$(T_0 p + 1) \vartheta_2 = k_0 \varphi, \quad (1)$$

где ϑ_2 — фактическое значение температуры объекта, φ — угол поворота регулирующего органа.

2. Уравнение чувствительного элемента

$$a\omega_1 = k_1 \vartheta, \quad \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2, \quad (2)$$

где ϑ_1 — заданное значение температуры объекта, ϑ — ошибка системы.

3. Уравнение релейного усилителя

$$u = F(a\omega), \quad a\omega = a\omega_1 - a\omega_{oc}, \quad (3)$$

где $F(a\omega)$ — нелинейная функция, заданная статической характеристикой (см. рис. 217).

4. Уравнение двигателя постоянного тока

$$p\alpha = k_2 u, \quad (4)$$

где α — угол поворота вала двигателя.

5. Уравнение редуктора

$$\varphi = k_3 \alpha, \quad (5)$$

где $k_3 = \frac{1}{i}$ — коэффициент передачи редуктора.

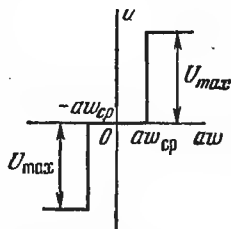


Рис. 217. Статическая характеристика поляризованного реле.

6. Уравнение цепи обратной связи

$$a\dot{w}_{oc} = k_{oc}\varphi, \quad (6)$$

где $a\dot{w}_{oc}$ — ампер-витки обмотки обратной связи.

Структурная схема системы изображена на рис. 218.

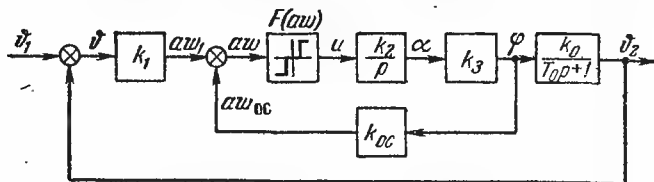


Рис. 218. Структурная схема системы автоматического регулирования температуры.

В соответствии со структурной схемой дифференциальное уравнение линейной части системы можно записать в следующем виде:

$$(T_0p + 1)pa\dot{w} = k_1p\dot{v}_1 - k_2k_3[k_{oc}(T_0p + 1) + k_0k_1]u. \quad (7)$$

Подставим в уравнение (8) численные значения параметров. Получим

$$(10p^2 + p)a\dot{w} = 0,25p\dot{v}_1 - (0,05p + 0,015)u. \quad (8)$$

Уравнение линейной части (7) дополняется уравнением нелинейного звена (3)

$$u = F(a\dot{w}).$$

378. Составить дифференциальные уравнения системы регулирования скорости вращения турбогенератора (рис. 219). На схеме обозначено: ω — отклонение угловой скорости вращения вала турбогенератора от номинального значения, η — координата положения муфты центробежного механизма, σ — перемещение штока золотника, ξ — перемещение цилиндра гидравлического двигателя и связанной с ним заслонки.

Исходные данные: объект (турбогенератор) можно рассматривать как апериодическое звено первого порядка с коэффициентом передачи k_0 и постоянной времени T_0 ; чувствительный элемент представляет собой

апериодическое звено второго порядка с коэффициентом передачи k_1 и постоянными времени T_1 и T_2 , $k_2 = \frac{AC}{AB}$, $k_3 = \frac{BC}{AB}$, статическая характеристика гидравлического двигателя задана графиком (рис. 220).

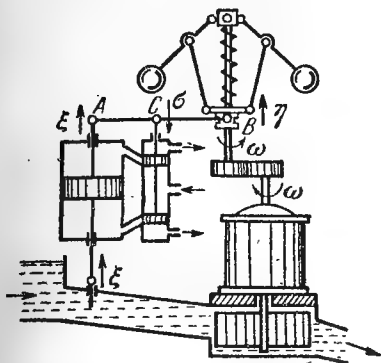


Рис. 219. Система регулирования скорости вращения турбогенератора.

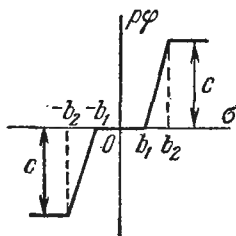


Рис. 220. Статическая характеристика гидравлического двигателя.

Решение. Запишем дифференциальные уравнения звеньев системы.

1. Уравнение регулируемого объекта (турбогенератора)

$$(T_0 p + 1) \omega = k_0 \xi. \quad (1)$$

2. Уравнение чувствительного элемента (центробежного механизма)

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \eta = k_1 \omega. \quad (2)$$

3. Уравнение золотника.

Для составления уравнения золотника зададимся направлением отсчета всех координат так, как показано на рис. 219. При произвольном перемещении точек A , B и C получим

$$\sigma = -k_2 \eta - k_3 \xi. \quad (3)$$

4. Уравнение гидравлического двигателя запишем в следующем виде:

$$p \xi = F(\sigma), \quad (4)$$

где $F(\sigma)$ — нелинейная функция, заданная статической характеристикой (рис. 220).

По уравнениям (1) — (4) определяем дифференциальное уравнение линейной части системы

$$(T_0 p + 1)(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)\sigma = -(k_0 k_1 k_2 + k_3)\xi. \quad (5)$$

Это уравнение дополняется уравнением нелинейного звена (4)

$$p\xi = F(\sigma). \quad (6)$$

379. Составить дифференциальные уравнения системы автоматического регулирования давления (рис. 221).

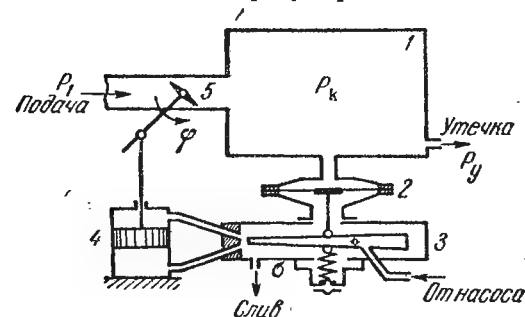


Рис. 221. Система автоматического регулирования давления.

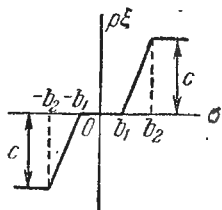


Рис. 222. Статическая характеристика струйного усилителя и гидравлического двигателя.

На схеме обозначено: 1 — объект; 2 — мембранный измеритель давления (чувствительный элемент); 3 — струйный усилитель; 4 — гидравлический двигатель; 5 — заслонка (регулирующий орган).

Исходные данные.

1. Уравнение регулируемого объекта

$$(T_0 p + 1)p_k = k_0 \varphi,$$

где p_k — отклонение давления, φ — угол поворота заслонки.

2. Уравнение чувствительного элемента

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)\sigma = -k_1 p_k.$$

3. Статическая характеристика струйного усилителя и гидравлического двигателя изображена на рис. 222.

Ответ. Дифференциальное уравнение линейной части системы

$$(T_0 p + 1)(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \sigma = -k_0 k_1 \Phi.$$

Уравнение нелинейного звена

$$p \Phi = F(\sigma).$$

380. Составить дифференциальные уравнения интегрирующего привода (рис. 223) при учете нелинейности

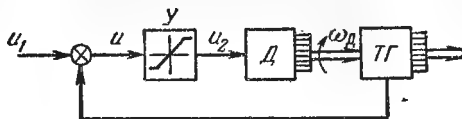


Рис. 223. Интегрирующий привод.

типа насыщение в усилителе (рис. 224). На схеме обозначено: Y — усилитель, $Д$ — двигатель, $ТГ$ — тахогенератор.

Исходные данные: коэффициент передачи двигателя $k_2 = 4 \text{ рад/в} \cdot \text{сек}$, электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,1 \text{ сек}$, крутизна статической характеристики тахогенератора

$k_{тг} = 10^{-2} \text{ в} \cdot \text{сек/рад}$, мак-

симальное напряжение на выходе усилителя $U_{2 \max} = 120 \text{ в}$, ширина зоны линейности статической характеристики усилителя $b = 0,1 \text{ в}$.

Ответ. Дифференциальное уравнение линейной части системы

$$(0,1 p + 1) u = (0,1 p + 1) u_1 - 0,04 u_2.$$

Уравнение нелинейного звена

$$u_2 = F(u).$$

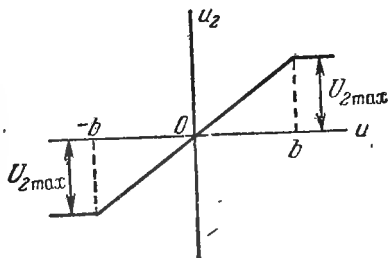


Рис. 224. Статическая характеристика усилителя.

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

§ 12.1. Метод фазовых траекторий

381. Исследовать процессы в электромеханической следящей системе с электромагнитными муфтами трения и нелинейным логическим устройством (см. рис. 212) в режиме стабилизации. В качестве исходных данных принять данные задачи 375.

Решение. В режиме стабилизации угол поворота командной оси $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = -\vartheta$. При этом уравнение всей системы можно записать в следующем виде (см. задачу 375):

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \begin{cases} 0,1 & \text{при } \vartheta < -0,2^\circ, \quad \dot{\vartheta} < 0,1 \text{ град/сек,} \\ -0,1 & \text{при } \vartheta > 0,2^\circ, \quad \dot{\vartheta} > -0,1 \text{ град/сек,} \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1)$$

Найдем уравнение фазовых траекторий для области I (рис. 225). Для этого введем новые переменные $x = \vartheta$ и $y = \frac{d\vartheta}{dt}$ и уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{dy}{dt} = 0,1. \quad (4)$$

Для исключения времени t разделим это уравнение на $\frac{dx}{dt} = y$. Получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0,1}{y} \quad (5)$$

или

$$y dy = 0,1 dx. \quad (6)$$

Проинтегрировав уравнение (6), получаем уравнение фазовых траекторий

$$y^2 = 0,05x + C_1, \quad (7)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Уравнение фазовых траекторий для областей II и III получают аналогичным образом:

$$y^2 = -0,05x + C_2 \quad (8)$$

II

$$y = C_3. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (8) представляют собой уравнения парабол, симметричных относительно оси x , параметр

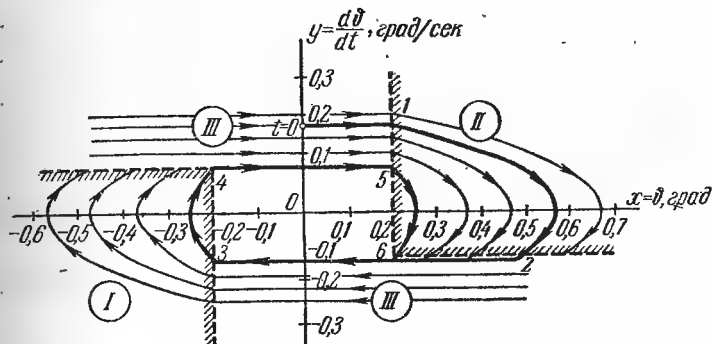


Рис. 225. Фазовые траектории следящей системы к задаче 381.

которых $p = 0,025$. Уравнение (9) представляет собой уравнение прямых линий, параллельных оси x . Вид фазовых траекторий изображен на рис. 225.

Зададимся начальными условиями процесса. Пусть при $t = 0$, $x = \vartheta = 0$, $y = \dot{\vartheta} = 0,2$ град/сек. По виду фазовой траектории для заданных начальных отклонений можно установить, что переходный процесс заканчивается менее, чем за один период, после чего в системе устанавливаются автоколебания. Амплитуда угловых колебаний $\alpha_0 \approx 0,25^\circ$ и амплитуда колебаний скорости $\alpha_{\dot{\vartheta}} = 0,1$ град/сек легко определяются по предельному циклу.

382. Исследовать процессы в электромеханической следящей системе с электромагнитными муфтами трения,

рассмотренной в задаче 375, при условии, что вместо нелинейного логического устройства в системе используется релейный усилитель. Статическая характеристика $F(\theta)$

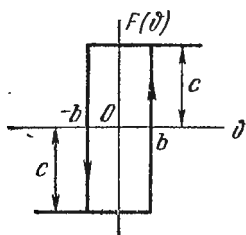


Рис. 226. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 382.

этого усилителя изображена на рис. 226. Значения параметров релейного усилителя: $b = 0,2^\circ$, $c = 1$.

Ответ. Фазовые траектории системы представляют собой параболы, уравнения которых

$$y^2 = 0,05x + C_1$$

$$y^2 = -0,05x + C_2$$

Линиями переключения привода являются прямые AB и CD (рис. 227). При любых начальных условиях изображающая точка удаляется от начала координат. Следовательно, система неустойчива.

383. Исследовать процессы в системе регулирования температуры (см. рис. 216) при отключенной местной

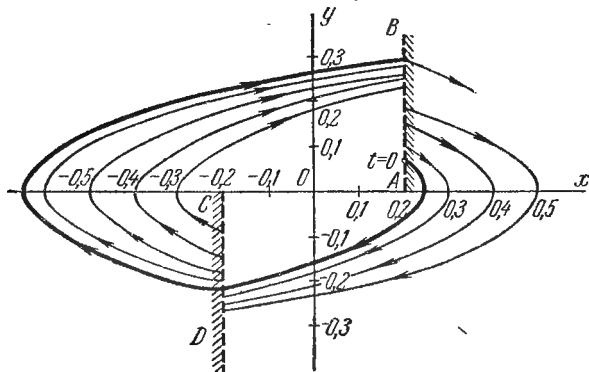


Рис. 227. Фазовые траектории следящей системы к задаче 382.

обратной связи. В качестве исходных данных принять данные задачи 377.

Решение. В режиме стабилизации температуры можно принять $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = -\vartheta$. При этом уравнения

звеньев системы можно записать в следующем виде (см. задачу 377):

1. Уравнение объекта регулирования

$$(T_0 p + 1) \vartheta = -k_0 \varphi. \quad (1)$$

2. Уравнение чувствительного элемента

$$a \omega_1 = k_1 \vartheta. \quad (2)$$

3. Уравнение усилителя (при $k_{0.c} = 0$)

$$u = F(a \omega_1). \quad (3)$$

4. Уравнение двигателя постоянного тока

$$p \alpha = k_2 u. \quad (4)$$

5. Уравнение редуктора

$$\varphi = k_3 \alpha. \quad (5)$$

Учитывая, что ток в обмотке поляризованного реле пропорционален отклонению температуры ϑ , а скорость отклонения регулирующего органа $\frac{d\varphi}{dt}$ пропорциональна

напряжению u , в качестве входной величины нелинейного звена (поляризованного реле) можно принять ϑ , а в качестве выходной — $\frac{d\varphi}{dt}$ (рис. 228). На этом рисунке $b =$

$$= \frac{a \omega_{cp}}{k_1} = \frac{0,5}{0,25} = 2^\circ, \quad \omega_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\max} =$$

$$= k_2 k_3 U_{\max} = 0,22 \text{ рад/сек.}$$

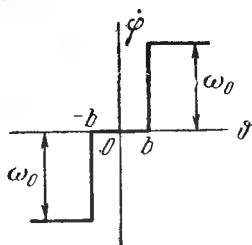


Рис. 228. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 383.

В соответствии с уравнением объекта регулирования (1) и статической характеристикой нелинейного звена (см. рис. 228), уравнения всей системы можно записать в следующем виде:

$$(T_0 p + 1) \vartheta = -k_0 \varphi, \quad (6)$$

$$p \varphi = \begin{cases} +\omega_0 & \text{при } \vartheta > +b, \\ 0 & \text{при } |\vartheta| < b, \\ -\omega_0 & \text{при } \vartheta < -b, \end{cases} \quad (7)$$

Решив уравнения (6) и (7) совместно, получим

$$(T_0\rho + 1)p\vartheta = -k_0\omega_0 \quad \text{при} \quad \vartheta > +b, \quad (8)$$

$$(T_0\rho + 1)p\vartheta = k_0\omega_0 \quad \text{при} \quad \vartheta < -b, \quad (9)$$

$$(T_0\rho + 1)p\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad |\vartheta| < b. \quad (10)$$

Рассмотрим уравнение (8):

$$T_0 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{d\vartheta}{dt} = -k_0\omega_0. \quad (11)$$

Введем обозначения $x = \vartheta$, $\frac{dx}{dt} = y$ и уравнение (11) перепишем следующим образом:

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y = -k_0\omega_0. \quad (12)$$

Для исключения времени из уравнения (12) разделим его на $\frac{dx}{dt} = y$. Получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_0} - \frac{k_0\omega_0}{T_0 y},$$

или после деления переменных

$$dx = -T_0 dy - \frac{T_0 k_0 \omega_0}{y + k_0 \omega_0} dy. \quad (13)$$

Проинтегрировав уравнение (13), получим уравнение фазовых траекторий

$$x = -T_0 y + T_0 k_0 \omega_0 \ln(y + k_0 \omega_0) + C_1 \quad \text{при} \quad x > +b. \quad (14)$$

Проделав аналогичные операции с уравнениями (9) и (10), получим для них

$$x = -T_0 y - T_0 k_0 \omega_0 \ln(y - k_0 \omega_0) + C_2 \quad \text{при} \quad x < -b, \quad (15)$$

$$x = -T_0 y + C_3 \quad \text{при} \quad |x| < b. \quad (16)$$

Поставив в уравнения (14)–(16) численные значения параметров, получим

$$x = -10y + 22 \ln(2,2 + y) + C_1 \quad \text{при} \quad x > +b, \quad (17)$$

$$x = -10y - 22 \ln(2,2 - y) + C_2 \quad \text{при} \quad x < -b, \quad (18)$$

$$x = -10y + C_3 \quad \text{при} \quad |x| < b. \quad (19)$$

По уравнениям (17)–(19) на рис. 229 построен фазовый портрет всей системы. Там же выделена фазовая

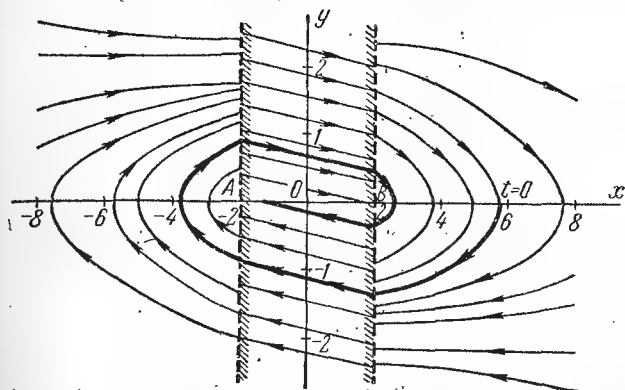


Рис. 229. Фазовые траектории системы регулирования температуры к задаче 383.

траектория, соответствующая начальным условиям: при $t=0$ $\vartheta = 5,7^\circ$, $\dot{\vartheta} = 0$. По виду фазовой траектории можно установить, что процесс в системе заканчивается немного больше, чем за один период колебаний. Переходный процесс в системе может закончиться в любой точке отрезка AB .

384. Исследовать процессы в системе регулирования температуры, рассмотренной в задаче 383, при условии, что поляризованное реле обладает статической характеристикой, изображенной на рис. 230. Численные значения параметров: $b = 2^\circ$, $\omega_0 = 0,22$ рад/сек.

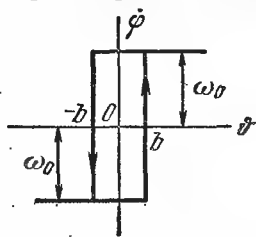


Рис. 230. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 384.

Ответ. Уравнения фазовых траекторий в области I и в области II (рис. 231) следующие:

$$x = -10y + 22 \ln(2,2 + y) + C_1,$$

$$x = -10y - 22 \ln(2,2 - y) + C_2.$$

Переключение привода происходит на прямых AB и CD . В системе при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания. Амплитуда колебаний температуры $a_\theta \approx 5^\circ$, амплитуда колебаний скорости изменения температуры $a_{\dot{\theta}} \approx 1,2$ град/сек.

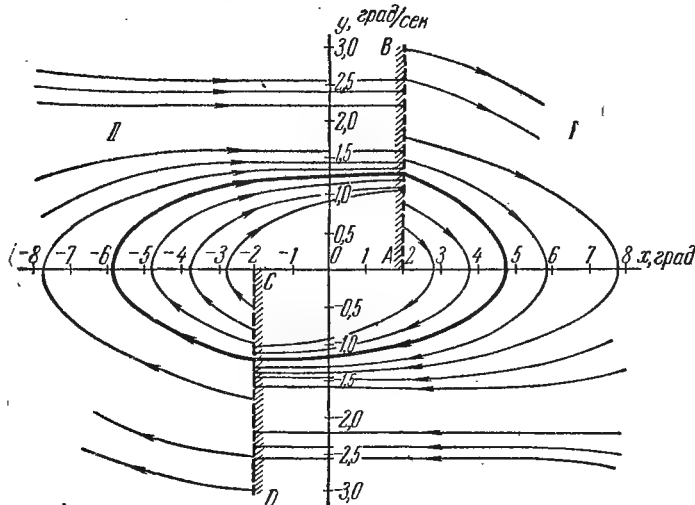


Рис. 231. Фазовые траектории системы регулирования температуры к задаче 384.

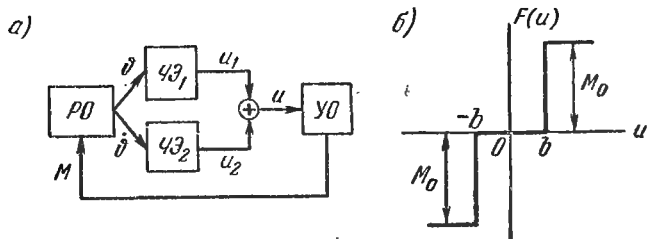


Рис. 232. Система стабилизации ИСЗ и статическая характеристика управляющего устройства к задаче 385.

385. Исследовать устойчивость системы стабилизации искусственного спутника Земли (ИСЗ), схема которой изображена на рис. 232 а, б.

На схеме обозначено: PO — регулируемый объект (ИСЗ), $ЧЭ_1$ и $ЧЭ_2$ — чувствительные элементы (датчики угла рассогласования ϑ и угловой скорости $\dot{\vartheta}$), $УО$ — управляющее устройство (совместно с исполнительным органом), M — стабилизирующий момент со стороны исполнительного органа, u_1 и u_2 — напряжения на выходе чувствительных элементов.

Исходные данные: момент инерции ИСЗ $J = 5000 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, максимальное значение стабилизирующего момента $M_0 = 500 \text{ Г} \cdot \text{см}$, коэффициент передачи датчика угла рассогласования $k_1 = 1 \text{ в/град}$, коэффициент передачи датчика угловой скорости $k_2 = 1 \text{ в} \cdot \text{сек/град}$, ширина зоны нечувствительности управляющего устройства $b = 0,2 \text{ в}$, ширина зоны нечувствительности $ЧЭ_2$ (рис. 233) $d = 0,1 \text{ град/сек}$, временное запаздывание в управляющем устройстве $\tau = 0,3 \text{ сек}$. Сопротивлением среды вращению ИСЗ можно пренебречь.

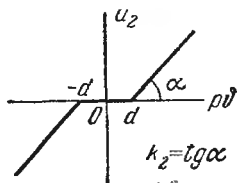


Рис. 233. Статическая характеристика чувствительного элемента к задаче 385.

Решение. Уравнение объекта запишем в виде

$$J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -M. \quad (1)$$

Уравнение управляющего устройства

$$M = F(u), \quad (2)$$

где $F(u)$ — нелинейная функция, заданная статической характеристикой (см. рис. 232, б).

Суммарный сигнал на выходе чувствительных элементов $ЧЭ_1$ и $ЧЭ_2$

$$u = u_1 + u_2 = k_1 \vartheta + F_1(\dot{\vartheta}), \quad (3)$$

где $F(\dot{\vartheta})$ — нелинейная функция, статическая характеристика которой изображена на рис. 233. В соответствии с рис. 233 выражение (3) можно записать в следующем виде:

$$u = \begin{cases} k_1 \vartheta & \text{при } |\dot{\vartheta}| \leq d, \\ k_1 \vartheta + k_2 (\dot{\vartheta} - d) & \text{при } \dot{\vartheta} \geq d, \\ k_1 \vartheta + k_2 (\dot{\vartheta} + d) & \text{при } \dot{\vartheta} \leq -d. \end{cases} \quad (4)$$

Переключение исполнительного устройства при отсутствии временного запаздывания ($\tau=0$) согласно

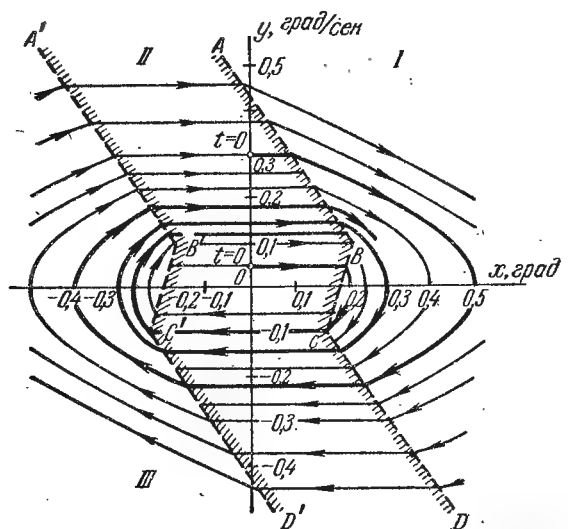


Рис. 234. Фазовые траектории системы стабилизации ИСЗ к задаче 385.

рис. 232, б происходит при $u = +b$ и $u = -b$, или с учетом (4)

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{b}{k_1}, \\ \vartheta &= -\frac{b}{k_1} \end{aligned} \right\} \text{при } |\dot{\vartheta}| \leq d, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{b}{k_1} - \frac{k_2(\dot{\vartheta} - d)}{k_1}, \\ \vartheta &= -\frac{b}{k_1} - \frac{k_2(\dot{\vartheta} - d)}{k_1} \end{aligned} \right\} \text{при } \dot{\vartheta} \geq d, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{b}{k_1} - \frac{k_2(\dot{\vartheta} + d)}{k_1}, \\ \vartheta &= -\frac{b}{k_1} - \frac{k_2(\dot{\vartheta} + d)}{k_1} \end{aligned} \right\} \text{при } \dot{\vartheta} \leq -d. \quad (7)$$

Если принять, что в течение времени τ движение ИСЗ происходит с постоянной скоростью, и обозначить $x = \dot{\vartheta}$, $y = \ddot{\vartheta}$, условия переключения исполнительного органа можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{b}{k_1} + \tau y = 0,2 + 0,3y, \\ x &= -\frac{b}{k_1} + \tau y = 0,2 - 0,3y \end{aligned} \right\} \text{ при } |y| \leq d = 0,1, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{b}{k_1} - \frac{k_2(y-d)}{k_1} + \tau y = 0,3 - 0,7y, \\ x &= -\frac{b}{k_1} - \frac{k_2(y-d)}{k_1} + \tau y = -0,1 - 0,7y \end{aligned} \right\} \text{ при } y \geq d = 0,1, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{b}{k_1} - \frac{k_2(y+d)}{k_1} + \tau y = 0,1 - 0,7y, \\ x &= -\frac{b}{k_1} - \frac{k_2(y+d)}{k_1} + \tau y = -0,3 - 0,7y \end{aligned} \right\} \text{ при } y \leq -d = -0,1. \quad (10)$$

По формулам (8)–(10) на рис. 234 построены линии переключения (ломаные $ABCD$ и $A'B'C'D'$), которые разделяют фазовую плоскость на три области. Согласно (1), (2) и рис. 232, б уравнения всей системы будут равны

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \begin{cases} -\frac{M_0}{J} = -0,1 & \text{для области I,} \\ 0 & \text{для области II,} \\ +\frac{M_0}{J} = 0,1 & \text{для области III.} \end{cases} \quad (11)$$

После замены $x = \dot{\vartheta}$, $y = \frac{d\vartheta}{dt}$ разделим уравнения (11) на $\frac{dx}{dt} = y$. Получим

$$y dy = -0,1 dx \quad \text{для области I,}$$

$$dy = 0 \quad \text{для области II,}$$

$$y dy = +0,1 dx \quad \text{для области III,}$$

откуда после интегрирования найдем уравнения фазовых траекторий

$$\left. \begin{aligned} y^2 + 0,2x &= C_1 && \text{для области I,} \\ y &= C_2 && \text{для области II,} \\ y^2 - 0,2x &= C_3 && \text{для области III.} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Первое и третье уравнения (12) представляют собой уравнения парабол, оси которых совпадают с осью x . Второе уравнение (12) есть уравнение прямой. Фазовый портрет системы изображен на рис. 234. Процесс в системе является расходящимся при малых начальных условиях и затухающим при больших начальных условиях. Фазовые траектории сходятся к предельному циклу, свидетельствующему о наличии в системе автоколебаний. Амплитуда угловых колебаний $\alpha_0 \approx 0,3^\circ$, амплитуда колебаний скорости $\dot{\alpha}_0 \approx 0,14$ град/сек.

386. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 235 а и б, построить фазовый портрет методом изоклин.

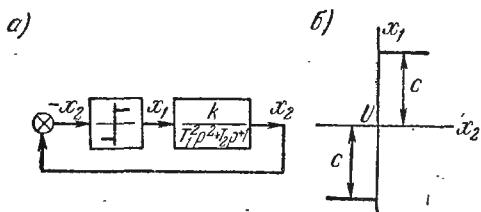


Рис. 235. Структурная схема и статическая характеристика нелинейной системы к задаче 386.

Исходные данные: $T_1^2 = 0,5 \text{ сек}^2$, $T_2 = 1 \text{ сек}$, $k = 1$, $c = 2$.

Решение. Согласно структурной схеме уравнения замкнутой нелинейной системы могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) x_2 &= -kc && \text{при } x_2 > 0, \\ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) x_2 &= +kc && \text{при } x_2 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Введем обозначения $x = x_2$, $y = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$ и одновременно подставим численные значения параметров. Получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2y - 2x - 4 \quad \text{при } x > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y - 2x + 4 \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для исключения времени поделим уравнения (2) на $\frac{dx}{dt} = y$. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{2y + 2x + 4}{y} \quad \text{при } x > 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2y + 2x - 4}{y} \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Положим в первом уравнении (3) $\frac{dy}{dx} = m$, а во втором — $\frac{dy}{dx} = n$, и найдем уравнения изоклин:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{2x + 4}{m + 2} \quad \text{при } x > 0, \\ y &= -\frac{2x - 4}{n + 2} \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

По уравнениям (4) для различных значений m и n строим поле изоклин (рис. 236). Наклон фазовой траектории к оси абсцисс для каждой изоклины на рис. 236 показан отрезками прямых, проведенных соответственно под углами $\arctg m$ и $\arctg n$. Эти отрезки являются касательными к фазовой траектории.

Как видно из рис. 236, при любых начальных условиях изображающая точка стремится к началу координат. Следовательно, исследуемая система устойчива.

387. С помощью метода изоклин построить фазовые траектории и исследовать устойчивость нелинейной системы, свободное движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0,5x \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

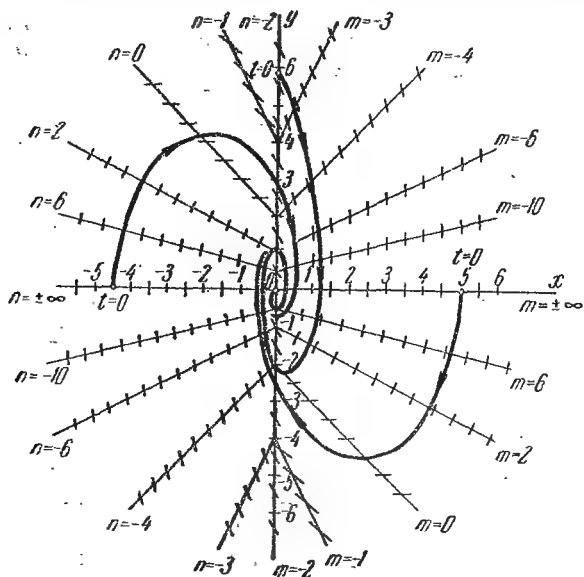


Рис. 236. Изоклины и фазовые траектории к задаче 386.

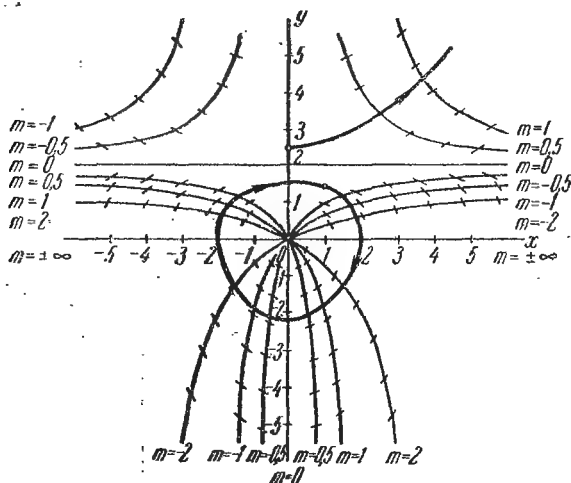


Рис. 237. Изоклины и фазовые траектории к задаче 387.

Начальные условия процесса: при $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 2,5$.

Ответ. Система неустойчива. Уравнение изоклин

$$y = - \frac{x}{m - 0,5x}.$$

Фазовые траектории изображены на рис. 237.

§ 12.2. Метод А. М. Ляпунова — А. И. Лурье

388. Исследовать устойчивость нелинейной автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 238.

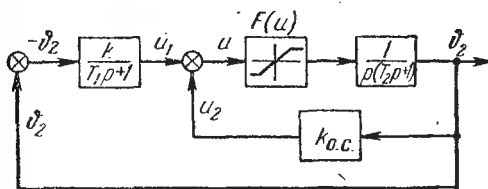


Рис. 238. Структурная схема системы к задаче 388.

Решение. Согласно структурной схеме система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \dot{u}_1 + u_1 &= -k\vartheta_2, \\ T_2 \dot{\vartheta}_2 + \vartheta_2 &= F(u), \\ u &= u_1 - k_{oc}\vartheta_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Приведем уравнения (1) к нормальному виду. Для этого введем обозначения

$$\eta_1 = u_1, \quad \eta_2 = \dot{\vartheta}_2, \quad \eta_3 = \vartheta_2, \quad \sigma = u, \quad F(u) = f(\sigma).$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\frac{1}{T_1} - \frac{k}{T_1} \eta_3, \\ \dot{\eta}_2 &= -\frac{1}{T_2} \eta_2 + \frac{1}{T_2} f(\sigma), \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_2, \\ \sigma &= \eta_1 - k_{oc} \eta_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Система уравнений (2) совпадает с формой второго типа (см. п. 6 приложения 23) при $n=3$ и $a_{11} = -\frac{1}{T_1}$, $a_{12}=0$, $a_{13} = -\frac{1}{T_2}$, $a_{21}=0$, $a_{22} = -\frac{1}{T_2}$, $a_{23}=0$, $a_{31}=0$, $a_{32}=1$, $a_{33}=0$, $b_1=0$, $b_2 = \frac{1}{T_2}$, $b_3=0$, $c_1=1$, $c_2=0$, $c_3 = -k_{oc}$.

Запишем уравнения (2) в канонической форме (см. приложение 23). Для этого из коэффициентов уравнения составим определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_1} - \lambda & 0 & -\frac{k}{T_1} \\ 0 & -\frac{1}{T_2} - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \left(\lambda + \frac{1}{T_1} \right) \left(\lambda + \frac{1}{T_2} \right), \quad (3)$$

и определим корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Ввиду того, что в характеристическом уравнении имеется один нулевой корень, канонические уравнения записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + f(\sigma) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - r f(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Определим постоянные r , β_1 и β_2 :

$$r = -(c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3) = 0,$$

так как $b_1=0$, $c_2=0$, $b_3=0$.

Постоянные β_1 и β_2 определяются по формулам (п. 10) приложения 23.

Так как в нашем случае $c_2 = 0$, то согласно формуле (п. 11) приложения 23 требуется определить только $N_1(\lambda)$ и $N_3(\lambda)$ по формуле (п. 12) приложения 23

$$N_1(\lambda) = b_2 D_{21}(\lambda) = -\frac{1}{T_2} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{k}{T_1} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{k}{T_1 T_2}, \quad (5)$$

$$N_3(\lambda) = b_2 D_{23}(\lambda) = -\frac{1}{T_2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_1} - \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{T_2} \left(\lambda + \frac{1}{T_1} \right). \quad (6)$$

Определяем $D'(\lambda)$:

$$D'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) = 3\lambda^2 + 2\lambda \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{1}{T_1 T_2}. \quad (7)$$

По формуле (п. 11) приложения 23 находим

$$\gamma_1 = -\frac{c_1 N_1(\lambda_1) + c_3 N_3(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} = -\frac{k T_1}{T_2 - T_1},$$

$$\gamma_2 = -\frac{c_1 N_1(\lambda_2) + c_3 N_3(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} = \frac{k T_2 + k_{oc} (T_2 - T_1)}{T_2 - T_1}$$

и определяем

$$\beta_1 = \lambda_1 \gamma_1 = \frac{k}{T_2 - T_1},$$

$$\beta_2 = \lambda_2 \gamma_2 = -\frac{1}{T_2} \frac{k T_2 + k_{oc} (T_2 - T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Для класса нелинейных систем, к которому принадлежит рассматриваемая система, достаточные условия устойчивости имеют вид (см. приложение 24)

$$\Gamma^2 > 0 \quad (8)$$

и

$$\Gamma^2 > -4\vartheta, \quad (9)$$

где

$$\Gamma^2 = \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} = k + k_{oc},$$

$$\vartheta = \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{4\lambda_1 \lambda_2} = -\frac{2k T_2 + k_{oc} (T_2 - T_1)}{4T_2}.$$

Условие (9) приводит к следующему достаточному условию устойчивости рассматриваемой системы:

$$k_{oc} T_1 > k T_2. \quad (10)$$

389. Исследовать устойчивость нелинейной автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 239.

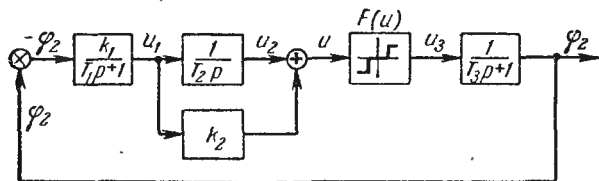


Рис. 239. Структурная схема системы к задаче 389.

Ответ. Дифференциальные уравнения системы в канонической форме имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + f(\sigma), \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \end{aligned} \right\}$$

где $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{T_3}$, а коэффициенты β_1 и β_2 равны

$$\beta_1 = \frac{k_1(k_2 T_2 - T_1)}{T_1 T_2 (T_1 - T_3)}, \quad \beta_2 = \frac{k_1(T_2 k_1 - T_3)}{T_2 T_3 (T_3 - T_1)}.$$

Условие устойчивости системы $\Gamma^2 > -4\theta$ (приложение 24) может быть записано в следующем виде:

$$k_2 > \frac{T_1 T_3}{T_2 (T_1 + T_3)}.$$

390. Исследовать устойчивость системы, структурная схема которой изображена на рис. 240.

Решение. Согласно структурной схеме дифференциальные уравнения системы имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \ddot{u}_1 + \dot{u}_1 &= -k_1 \delta, \\ \dot{\delta} &= F(u), \\ u &= k_2 u_1 + k_3 \dot{u}_1 - k_{oc} \delta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Преобразуем систему уравнений (1) к канонической форме. Для этого обозначим

$$\eta = u_1, \quad \xi = \delta, \quad \sigma = u, \quad f(\sigma) = F(u)$$

и запишем уравнения (1) в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} + \frac{1}{T_1} \dot{\eta} &= -\frac{k_1}{T_1} \xi, \\ \sigma &\approx k_2 \eta + k_3 \dot{\eta} - k_{oc} \xi, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Полученные уравнения (2) имеют форму (п. 12) приложения 24 при

$$n=3, \quad a_1 = \frac{1}{T_1}, \quad d = \frac{k_1}{T_1}, \quad c_0 = k_2, \quad c_1 = k_3, \quad r = k_{oc}$$

и равенстве нулю всех остальных коэффициентов.

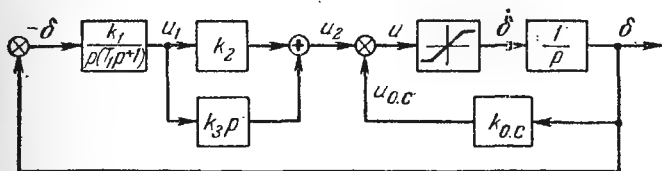


Рис. 240. Структурная схема системы к задаче 390.

Определяем корни многочлена

$$D(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda = \lambda^2 + \frac{1}{T_1} \lambda.$$

Эти корни равны $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$, $\lambda_2 = 0$.

Коэффициенты β_1 и β_2 определяем по формулам (п. 17) приложения 24. Для этого предварительно находим

$$\Delta(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda = k_2 + k_3 \lambda,$$

$$D_1(\lambda) = \lambda + a_1 = \lambda + \frac{1}{T_1},$$

$$D'_1(\lambda) = 1.$$

С учетом этих выражений

$$\beta_1 = -d \frac{\Delta(\lambda_1)}{\lambda_1 D'_1(\lambda_1)} = -\frac{k_1}{T_1} \frac{k_2 - \frac{k_3}{T_1}}{-\frac{1}{T_1}} = \frac{k_1}{T_1} (k_2 T_1 - k_3),$$

$$\beta_2 = -d \frac{c_0}{a_{n-2}} = -\frac{k_1}{T_1} \frac{k_2}{-\frac{1}{T_1}} = k_1 k_2.$$

Уравнения системы в канонической форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + f(\sigma), \\ \dot{x}_2 &= f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - r. \end{aligned} \right\}$$

Достаточные условия устойчивости (1) и (2) приложения 24 в данном случае имеют следующий вид:

$$\Gamma^2 = \frac{\beta_1}{\lambda_1} + r > 0$$

или

$$\Gamma^2 = -k_1(k_2 T_1 - k_3) + k_{oc} > 0.$$

Из этого выражения получим окончательно достаточное условие устойчивости в виде

$$k_{oc} > k_1(k_2 T_1 - k_3) \quad \text{при} \quad k_2 T_1 > k_3.$$

§ 12.3. Частотный метод В. М. Попова

391. Структурная схема нелинейной автоматической системы изображена на рис. 241. Коэффициент передачи линейной части системы и нелинейного звена $k = k_n k_H$

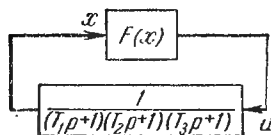


Рис. 241. Структурная схема системы к задаче 391.

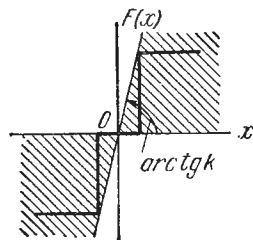


Рис. 242. Нелинейная статическая характеристика к задаче 391.

условно отнесен к нелинейному звену. Определить, при каких значениях k система будет абсолютно устойчива, если характеристика нелинейного звена расположена в секторе $(0, k)$ (рис. 242).

Исходные данные: постоянные времени линейной части системы $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,2$ сек, $T_3 = 0,1$ сек.

Решение. Частотная передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}. \quad (1)$$

Ее вещественная и мнимая части соответственно равны

$$U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}, \quad (2)$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{-\omega(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^3 T_1 T_2 T_3}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}. \quad (3)$$

Введем некоторые функции $U^*(j\omega)$ и $V^*(j\omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} U^*(\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega) = \\ &= \frac{1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V^*(\omega) &= \omega \operatorname{Im} W(j\omega) = \\ &= \frac{-\omega^2(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^4 T_1 T_2 T_3}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

По выражениям (4) и (5) построим характеристику $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ (рис. 243) и через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$

проведем прямую Попова так, чтобы построенная характеристика целиком лежала справа от этой прямой.

Согласно рис. 243 $\frac{1}{k} \approx 0,08$. Поэтому система абсолютно устойчива для всех нелинейных характеристик, лежащих

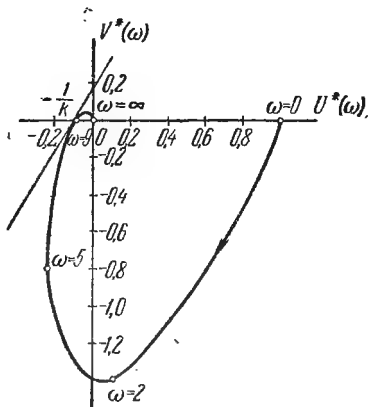


Рис. 243. Характеристика $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ к задаче 391.

в секторе

$$0 < k < 12,5 \quad (6)$$

и, в частности, для характеристики релейного типа, изображенной на рис. 242.

Таким образом, достаточное условие абсолютной устойчивости замкнутой нелинейной системы сводится в данном случае к выполнению необходимого и достаточного условия устойчивости замкнутой линейной системы, имеющей в разомкнутом состоянии коэффициент передачи, равный k .

392. Структурная схема нелинейной автоматической системы изображена на рис. 244. Проверить выполнение достаточного условия абсолютной устойчивости системы при следующих значениях параметров системы: $T_1 = 5$ сек, $T_2 = 1,25$ сек, $\xi_1 = 0,5$, $\xi_2 = 0,05$, коэффициент

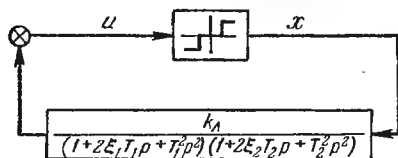


Рис. 244. Структурная схема системы к задаче 392.

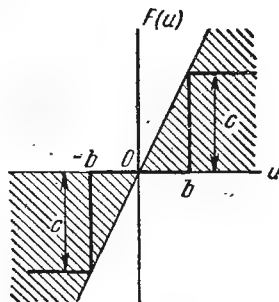


Рис. 245. Нелинейная статическая характеристика к задаче 392.

передачи линейной части системы $k_d = 4$, коэффициент усиления нелинейного звена $k_n = \frac{c}{b} = 0,5$ (рис. 245).

Решение. Коэффициент передачи разомкнутой системы

$$k = k_d k_n = 4 \cdot 0,5 = 2$$

отнесем к нелинейному звену. Тогда частотная передаточная функция разомкнутой системы будет равна

$$W_{\text{з}}(j\omega) = \frac{1}{(1 - T_1^2 \omega^2 + 2j\xi_1 T_1 \omega)(1 - T_2^2 \omega^2 + 2j\xi_2 T_2 \omega)}. \quad (1)$$

Определяем функции

$$U^*(\omega) = \operatorname{Re} W_n(j\omega) = \frac{(1 - T_1^2 \omega^2)(1 - T_2^2 \omega^2) - 4\xi_1 \xi_2 T_1 T_2 \omega^2}{[(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + 4\xi_1^2 T_1^2 \omega^2][(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + 4\xi_2^2 T_2^2 \omega^2]}, \quad (2)$$

$$V^*(\omega) = \omega \operatorname{Im} W_n(j\omega) = \frac{-2\omega^2 [(1 - T_1^2 \omega^2) \xi_2 T_2 + (1 - T_2^2 \omega^2) \xi_1 T_1]}{[(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + 4\xi_1^2 T_1^2 \omega^2][(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + 4\xi_2^2 T_2^2 \omega^2]}. \quad (3)$$

По выражениям (2) и (3) строим характеристику $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ (рис. 246). На вещественной оси отложим точку с координатами $(-\frac{1}{k}, j0)$. Через эту

точку можно провести прямую Попова так, что вся построенная характеристика будет располагаться справа от нее. Следовательно, данная система будет абсолютно устойчивой при заданном $k=2$, если статическая характеристика нелинейного звена целиком располагается

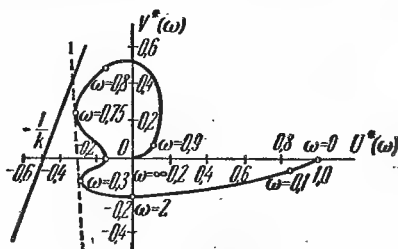


Рис. 246. Характеристика $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ к задаче 392.

в секторе $(0, k)$. Этот сектор заштрихован на рис. 245.

393. Для нелинейной системы, рассмотренной в задаче 392, определить граничное значение коэффициента $k = k_n k_{н.}$

Ответ. Граничное значение коэффициента передачи

$$k = \frac{1}{0,3} \approx 3,34.$$

394. Передаточная функция линейной части системы

$$W(p) = \frac{k_n}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Определить условия абсолютной устойчивости.

Ответ. Характеристика $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ целиком располагается в нижней полуплоскости. Через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$ при любом $0 < k < \infty$ можно провести прямую Попова так, что вся характеристика расположится правее ее. Поэтому система абсолютно устойчива при всех $k = k_{\text{н}}$ и для всех нелинейных звеньев, статические характеристики которых принадлежат сектору $(0, \infty)$, т. е. располагаются в I и III квадрантах.

§ 12.4. Метод припасовывания

395. Исследовать переходный процесс в системе, структурная схема которой изображена на рис. 247, а, б.

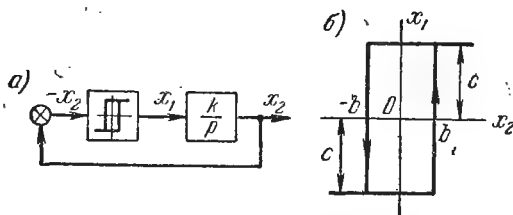


Рис. 247. Структурная схема системы и статическая характеристика нелинейного звена к задаче 395.

Исходные данные: $k = 2 \text{ сек}^{-1}$, $b = 0,5$, $c = 5$.

Решение. Согласно структурной схеме дифференциальное уравнение замкнутой нелинейной системы имеет следующий вид:

$$\dot{x}_2 + kF(x_2) = 0, \quad (1)$$

где $F(x_2)$ — нелинейная функция, заданная статической характеристикой (см. рис. 247, б), причем

$$F(x_2) = +c \begin{cases} \text{при } x_2 > +b, \\ \text{при } -b < x_2 < +b, \end{cases} \quad \text{когда } \dot{x}_2 < 0, \quad (2)$$

$$F(x_2) = -c \begin{cases} \text{при } x_2 < -b, \\ \text{при } -b < x_2 < +b, \end{cases} \quad \text{когда } \dot{x}_2 > 0. \quad (3)$$

Нелинейное уравнение (1) внутри участков (2) и (3) заменяем двумя линейными уравнениями:

$$x_2 + kc = 0, \quad (4)$$

$$x_2 - kc = 0, \quad (5)$$

или, с учетом численных значений параметров

$$x_2 + 10 = 0, \quad (6)$$

$$x_2 - 10 = 0. \quad (7)$$

Решения уравнений (6) и (7) имеют вид

$$x_2 = -10t + C_1, \quad (8)$$

$$x_2 = 10t + C_2, \quad (9)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Для определения постоянной C_1 на первом участке процесса зададимся начальными условиями: при $t=0$ $x_2(t) = x_2(0)$. Из уравнения (8) находим

$$C_1 = C_{11} = x_2(0),$$

и решение (8) для первого участка окончательно принимает вид

$$x_{21} = -10t + x_2(0). \quad (10)$$

Постоянную интегрирования C_2 находим из условий равенства начального значения процесса на втором участке и конечного значения процесса на первом участке. При этом учитываем, что скорость на первом участке $\dot{x}_{21} = -10 < 0$ и согласно (2) переход ко второму участку происходит при $x_{21} = -b - 0,5$ в момент времени $t = t_1$, причем из (10)

$$t_1 = \frac{x_2(0) + 0,5}{10}. \quad (11)$$

Поэтому из условия припасовывания в точке $t = t_1$ можно записать

$$x_{21}(t_1) = -0,5 = x_{22}(t_1). \quad (12)$$

Из уравнения (9) с учетом (12) находим постоянную C_2 для второго участка процесса

$$C_2 = C_{22} = -0,5 - 10t_1$$

и окончательное выражение для решения на втором участке

$$x_{22} = 10(t - t_1) - 0,5, \quad t \geq t_1. \quad (13)$$

На этом участке скорость $\dot{x}_{22} = 10 > 0$. Поэтому согласно (3) при $x_{22} = +b$ в момент $t = t_2$ происходит переход на третий участок, для которого процесс описывается уравнением (8), но при новом значении постоянной $C_1 = C_{13}$. Из уравнений (13)

$$t_2 = \frac{10t_1 + 1}{10} = \frac{x_2(0) + 1,5}{10}.$$

Условие припасовывания в точке $t = t_2$ имеет вид

$$x_{22}(t_2) = 0,5 = x_{23}(t_2), \quad (14)$$

Рис. 248. Кривая переходного процесса к задаче 395.

где x_{23} означает решение (8) для третьего участка процесса.

Из уравнения (8) с учетом (14) находим постоянную C_1 для третьего участка

$$C_{13} = 0,5 + 10t_2$$

и окончательное выражение для решения на этом участке процесса

$$x_{23} = -10(t - t_2) + 0,5, \quad t \geq t_2. \quad (15)$$

Дальнейшее построение кривой переходного процесса производится аналогичным образом.

Переходный процесс для двух значений начальных условий $x_2(0) = 0,75$ и $x_2(0) = -0,25$ построен на рис. 248. Как видно из этого рисунка, в системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A = b = 0,5$ и частотой $\Omega = \frac{2\pi}{T} \approx 31,4 \text{ сек}^{-1}$.

396. Для предыдущей задачи определить амплитуду и частоту автоколебаний, если

- 1) $k = 1 \text{ сек}^{-1}$, $b = 0,5$, $c = 5$,
- 2) $k = 1 \text{ сек}^{-1}$, $b = 0,25$, $c = 5$,
- 3) $k = 1 \text{ сек}^{-1}$, $b = 0,25$, $c = 10$.

Ответ.

- 1) $A = 0,5, \quad \Omega \approx 15,7 \text{ сек}^{-1},$
- 2) $A = 0,25, \quad \Omega \approx 31,4 \text{ сек}^{-1},$
- 3) $A = 0,25, \quad \Omega \approx 62,8 \text{ сек}^{-1}.$

397. Для системы, рассмотренной в задаче 395, найти условия существования автоколебаний и аналитические выражения для их частоты и амплитуды.

Решение. Дифференциальное уравнение замкнутой нелинейной системы (см. рис. 247)

$$\dot{x}_2 + kF(x_2) = 0, \quad (1)$$

$$F(x_2) = +c \begin{cases} \text{при } x_2 > +b, \\ \text{при } -b < x_2 < +b, \end{cases} \quad \text{когда } \dot{x}_2 < 0, \quad (2)$$

$$F(x_2) = -c \begin{cases} \text{при } x_2 < -b, \\ \text{при } -b < x_2 < +b, \end{cases} \quad \text{когда } \dot{x}_2 > 0, \quad (3)$$

внутри участков (2) и (3) заменяем двумя линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_2 + kc = 0, \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 - kc = 0. \quad (5)$$

Находим решения уравнений (4) и (5)

$$x_{21} = -kct + C_1, \quad (6)$$

$$x_{22} = kct + C_2. \quad (7)$$

Время t на первом участке условимся отсчитывать от точки, в которой $x_{21} = +b$. Тогда начальное условие для первого участка будет равно

$$x_{21} = +b \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Используя его, находим постоянную интегрирования $C_1 = +b$. Отсюда на первом участке

$$x_{21} = -kct + b. \quad (8)$$

Для второго участка процесса время t будем отсчитывать от точки, в которой $x_{22} = -b$. Начальное условие для второго участка будет

$$x_{22} = -b \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (9)$$

Чтобы в системе существовало устойчивое периодическое решение (автоколебания) с периодом T , необходимо потребовать выполнения единственного условия (так как рассматривается система первого порядка, а характеристика $F(x_2)$ симметрична относительно начала координат)

$$x_{21}\left(\frac{T}{2}\right) = x_{22}(0). \quad (10)$$

Подставим в (10) значения переменных из (8) и (9). Получим

$$-\frac{kcT}{2} + b = -b. \quad (11)$$

Из (11) находим

$$T = \frac{4b}{kc}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi kc}{2b}. \quad (12)$$

Амплитуда автоколебаний A определяется как максимальное значение величины x_{21} , полученной из уравнения (8) в течение полупериода колебаний. Из (8) очевидно, что

$$A = |x_{21}|_{\max} = \left| -\frac{kcT}{2} + b \right| = b.$$

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

§ 13.1. Алгебраические способы определения устойчивости и автоколебаний

398. Исследовать устойчивость состояния равновесия электромеханической следящей системы, принципиальная и структурная схемы которой изображены на рис. 209 и 211, при следующих значениях параметров системы: $k_1 = 1$ в/град = 57,3 в/рад; $k_2 = 2,5$; $k_3 = 5,73$ рад/в · сек; $k_4 = 0$ (скоростная обратная связь отсутствует); $k_5 = 0,001$; $T_1 = 0,05$ сек; $T_m = 0,05$ сек. Статическая характеристика нелинейного звена изображена на рис. 210. Ширина зоны нечувствительности $b = 0,25$ в, $U_{3\max} = c = 110$ в.

Решение. По структурной схеме (см. рис. 211) определяем дифференциальное уравнение линейной части системы (см. задачу 374) при $\vartheta_1(t) = 0$

$$[T_1 T_m p^2 + (T_1 + T_m) p + 1] p u_2 = -k_1 k_2 k_3 k_5 u_3. \quad (1)$$

Для нелинейного звена запишем гармонически линеаризованное выражение

$$u_3 = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] u_2, \quad (2)$$

где согласно приложению 28 для нелинейности (см. рис. 210)

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad a \geq b, \quad (3)$$

$$q'(a) = 0.$$

Подставляя значение u_3 из уравнения (2) в уравнение (1), получим линеаризованное уравнение замкнутой нелинейной системы

$$[T_1 T_m p^3 + (T_1 + T_m) p^2 + p + kq(a)] u_2 = 0, \quad (4)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_5 = 0,82 \text{ сек}^{-1}$ — коэффициент передачи линейной части системы.

Этому дифференциальному уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$T_1 T_m p^3 + (T_1 + T_m) p^2 + p + kq(a) = 0. \quad (5)$$

Условия существования в уравнении (4) периодического решения

$$u_2 = A \sin \Omega t \quad (6)$$

будем отыскивать с помощью критерия Михайлова. Для этого в характеристический полином

$$L(p) = T_1 T_m p^3 + (T_1 + T_m) p^2 + p + kq(a) \quad (7)$$

подставим $p = j\omega$, выделим вещественную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega, a) &= kq(a) - (T_1 + T_m) \omega^2 = 0, \\ Y(\omega) &= \omega(1 - T_1 T_m \omega^2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из второго уравнения (8) сразу найдем искомую частоту периодического решения

$$\omega = \Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_m}} = \frac{1}{\sqrt{0,05 \cdot 0,05}} = 20 \text{ сек}^{-1}. \quad (9)$$

Подставим это значение в первое уравнение (8) и найдем выражение, связывающее амплитуду периодического решения $a = A$ с параметрами системы

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = \frac{T_1 + T_m}{k T_1 T_m}, \quad (10)$$

или, после подстановки числовых значений,

$$\frac{4 \cdot 110}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{0,25^2}{A^2}} = 48,8.$$

Решение этого уравнения дает два значения амплитуды $A_1 = 0,257$ в и $A_2 = 2,86$ в.

Для исследования устойчивости найденного периодического решения воспользуемся приближенным аналитическим условием [25], согласно которому периодическое решение устойчиво, если выполняется неравенство

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* > 0. \quad (11)$$

Из выражений (8) находим

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{k \partial q(a)}{\partial a} = \frac{4kc}{\pi} \frac{2b^2 - a^2}{a^3 \sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a \geq b,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = -2(T_1 + T_M)\omega,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1 - 3T_1 T_M \omega^2.$$

Подставим выражения для частных производных в (11) и одновременно произведем замену $\omega = \Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_M}}$. Получим условие устойчивости периодического решения в виде

$$\frac{4kc}{\pi} \frac{2b^2 - a^2}{a^3 \sqrt{a^2 - b^2}} (1 - 3) > 0$$

или

$$a > b \sqrt{2}. \quad (12)$$

Следовательно, из двух найденных значений амплитуды периодического решения $A_1 = 0,257$ в и $A_2 = 2,86$ в амплитуда A_2 соответствует устойчивому периодическому решению, т. е. является амплитудой автоколебаний.

Определим амплитуду и частоту колебаний исполнительной оси системы. Частота автоколебаний одинакова для любой переменной системы, в том числе и для угла ϑ_2 , и равна $\Omega = 20 \text{ сек}^{-1}$. Амплитуда колебаний A_0 согласно структурной схеме (см. рис. 211) равна

$$A_0 = \frac{A_2}{k_1 k_2} = \frac{2,86}{1 \cdot 2,5} = 1,14^\circ.$$

Определим зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы. Из выражений (9) и (10) видно, что частота автоколебаний Ω зависит только от постоянных времени T_1 и T_m , а амплитуда автоколебаний, кроме того, от коэффициента передачи линейной части системы k и ширины зоны нечувствительности нелинейного элемента b , причем из (10)

$$k = \frac{T_1 + T_m}{T_1 T_m q(a)}. \quad (13)$$

Из формулы (13) с учетом (12) получим критическое значение коэффициента передачи линейной части системы

$$k_{кр} = \frac{\pi b (T_1 + T_m)}{2c T_1 T_m}. \quad (14)$$

Для заданных значений параметров

$$k_{кр} = \frac{\pi \cdot 0,25 (0,05 + 0,05)}{2 \cdot 110 \cdot 0,05^2} \approx 0,0057 \text{ сек}^{-1}.$$

399. Исследовать следящую систему, рассмотренную в задаче 398, при наличии скоростной обратной связи. Коэффициент обратной связи $k_4 = 10^{-2} \text{ в} \cdot \text{сек/рад}$ (см. рис. 211). Остальные параметры системы остаются без изменения.

Ответ. Состояние равновесия системы устойчиво. Автоколебания отсутствуют.

400. Исследовать устойчивость состояния равновесия системы, структурная схема которой изображена на рис. 249. Если в системе

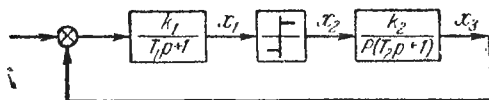


Рис. 249. Структурная схема системы к задаче 400.

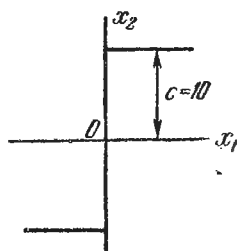


Рис. 250. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 400.

устанавливаются автоколебания, то определить их амплитуду и частоту для переменной x_1 . Исходные данные: $T_1 = 1 \text{ сек}$, $T_2 = 0,01 \text{ сек}$, $k_1 = 10$, $k_2 = 5 \text{ сек}^{-1}$, статиче-

ская характеристика нелинейного звена изображена на рис. 250.

Ответ. В системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A \approx 6,3$ и частотой $\Omega = 10 \text{ сек}^{-1}$.

$$x_1 = 6,3 \sin 10t.$$

401. Найти область устойчивого состояния равновесия и область автоколебаний и определить амплитуду и частоту автоколебаний для следящей системы, схема которой изображена на рис. 209, при учете нелинейности типа насыщения в предварительном усилителе и отсутствии релейного усилителя и обратной связи по напряжению тахогенератора.

Исходные данные: постоянная времени усилителя $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, электро-механическая постоянная времени двигателя $T_2 = 1 \text{ сек}$, общий коэффициент передачи линейной части системы $k_d = 20 \text{ сек}^{-1}$, коэффициент передачи чувствительного элемента $k_1 = 50 \text{ в/рад}$, статическая характеристика усилителя изображена на рис. 251. Исследование провести для $k_2 = 1$ и $k_2 = 2$.

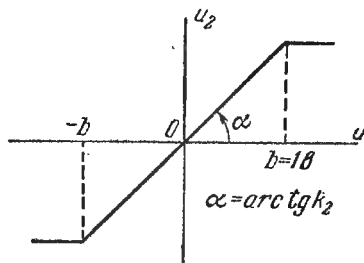


Рис. 251. Статическая характеристика усилителя следящей системы к задаче 401.

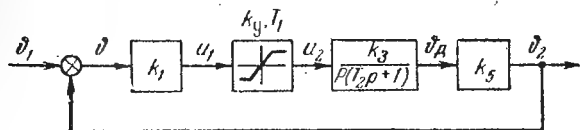


Рис. 252. Структурная схема следящей системы к задаче 401.

Решение. Составляем структурную схему системы (рис. 252). Согласно этой схеме дифференциальное уравнение линейной части системы при $\vartheta_1(t) = 0$ запишем в виде

$$(T_2 p + 1) p u_1 = -k_d u_2, \quad (1)$$

где $k = k_1 k_3 k_5$.

Дифференциальное уравнение нелинейного звена имеет вид

$$(T_1 p + 1) u_2 = k_y u_1. \quad (2)$$

Коэффициент усиления усилителя k_y является нелинейной функцией, заданной графически (рис. 251). Поэтому согласно методу гармонической линеаризации запишем для него гармонически линеаризованное выражение

$$k_y = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p, \quad (3)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации для характеристики с насыщением имеют значения (см. приложение 28)

$$\begin{aligned} q(a) &= k_2 && \text{при } a \leq b, \\ q(a) &= \frac{2k^2}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) && \text{при } a \geq b, \\ q'(a) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнений (1)–(3) получим линеаризованное уравнение замкнутой нелинейной системы

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_{\pi} q(a)] u_1 = 0, \quad (5)$$

которому соответствует характеристическое уравнение

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_{\pi} q(a) = 0. \quad (6)$$

Для отыскания условий существования периодического решения

$$u_1 = A \sin \Omega t \quad (7)$$

из характеристического полинома после подстановки $p = j\omega$ выделим вещественную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= k_{\pi} q(a) + (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y(\omega) &= \omega (1 - T_1 T_2 \omega^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Частота периодического решения находится из второго уравнения (8)

$$\omega = \Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 0,1}} \approx 3,16 \text{ сек}^{-1}. \quad (9)$$

Из первого уравнения (8) с учетом (9) получим формулу, связывающую амплитуду периодического решения с параметрами системы

$$\frac{2k_1 k_2}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}. \quad (10)$$

Для исследования устойчивости периодического решения найдем частные производные от выражений (8):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* &= k_1 \frac{\partial q(A)}{\partial A}, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* &= -2\Omega(T_1 + T_2) = -2 \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}} = -0,695, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* &= 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* &= 1 - 3T_1 T_2 \Omega^2 = 1 - 3 = -2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для устойчивости периодического решения (7) требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \\ &- \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

или, с учетом выражений (11),

$$-\frac{\partial q(A)}{\partial A} > 0, \quad (13)$$

т. е. частная производная $\frac{\partial q(A)}{\partial A}$ должна быть отрицательной.

Для определения знака этой производной по выражению (4) для $q(A)$ построим график (рис. 253), согласно которому

$$\frac{\partial q(A)}{\partial A} < 0 \quad \text{при} \quad A > b. \quad (14)$$

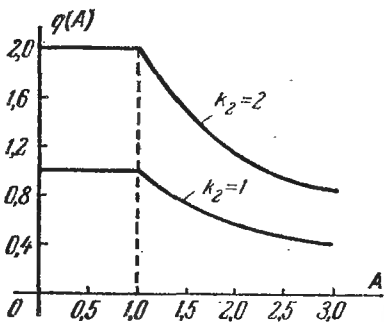


Рис. 253. Зависимость коэффициента гармонической линеаризации от амплитуды колебаний к задаче 401.

Следовательно, амплитуда периодического решения (7) будет амплитудой автоколебаний лишь при выполнении условия $A > b$. При $A < b$ автоколебания в системе отсутствуют, что и понятно, так как при этом согласно рис. 251 нелинейная система превращается в линейную, которая, как легко показать, устойчива.

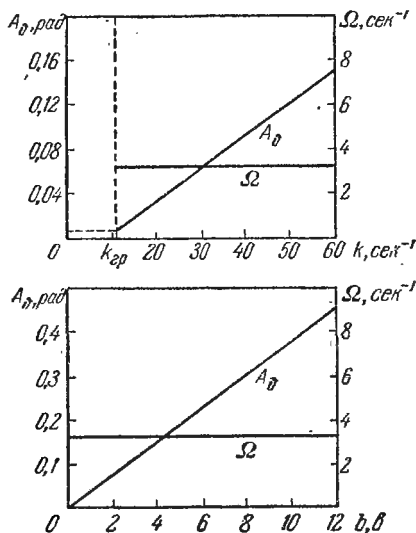


Рис. 254. Зависимость изменения амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы к задаче 401.

Определим амплитуду автоколебаний. Уравнение (10), связывающее ее с параметрами системы, является трансцендентным. Поэтому для определения амплитуды воспользуемся графоаналитическим методом. Для этого решим уравнение (10) относительно $k = k_1 k_2$:

$$k = \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T_1 T_2 \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right)} \quad (15)$$

и построим график $k = k(A_0)$ (рис. 254), где $A_0 = \frac{A}{k_1}$ — амплитуда колебаний исполнительской оси системы (см.

рис. 252). Что касается частоты автоколебаний Ω , то она остается неизменной для любой переменной системы и согласно выражению (9) не зависит от коэффициента k .

Граничный коэффициент передачи системы $k_{гр}$ определяется из выражения (15) при $A=b$ и равен

$$k_{гр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1 + 0,1}{0,1} = 11. \quad (16)$$

Автоколебания в системе возникают лишь при $k > k_{гр}$. Нетрудно убедиться, что граничный коэффициент (16)

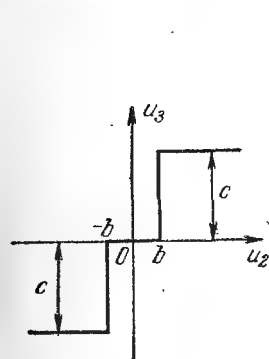


Рис. 255. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 402.

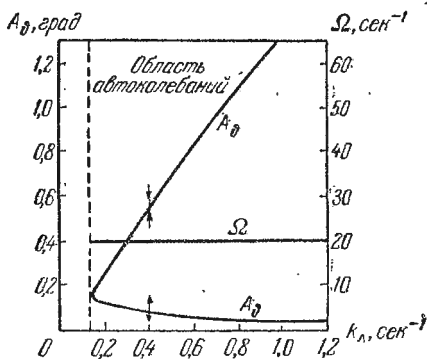


Рис. 256. Зависимости изменения амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы к задаче 402.

совпадает с коэффициентом передачи, найденным из условия границы устойчивости линейной системы. Но, в отличие от линейной системы, у которой за областью устойчивости лежит область неустойчивости, в системе с нелинейностью типа насыщения за областью устойчивости лежит область автоколебаний, т. е. устойчивых периодических колебаний с вполне определенной амплитудой и частотой.

На рис. 254 также изображены графики, связывающие амплитуду и частоту автоколебаний с шириной зоны линейности статической характеристики нелинейного звена b при $k_2 = 1$.

Для заданных значений параметров системы по графику (рис. 254, а) определяем частоту и амплитуду автоколебаний:

$$\Omega = 3,16 \text{ сек}^{-1}, \quad A_0 \approx 0,022 \text{ рад} \quad \text{при} \quad k_2 = 1;$$

$$\Omega = 3,16 \text{ сек}^{-1}, \quad A_0 \approx 0,044 \text{ рад} \quad \text{при} \quad k_2 = 2.$$

402. Найти область устойчивого состояния равновесия и область автоколебаний для следящей системы, рассмотренной в задаче 398, если аппроксимированная статическая характеристика имеет вид, как показано на рис. 2.55 при $b = 0,25$ в, $c = 110$ в.

Ответ. Область устойчивости состояния равновесия, область автоколебаний в зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от коэффициента передачи линейной части системы показаны на рис. 256.

§ 13.2. Частотный метод определения автоколебаний

403. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 257, если заданы параметры линейной

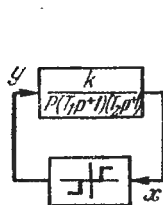


Рис. 257. Структурная схема системы к задаче 403.

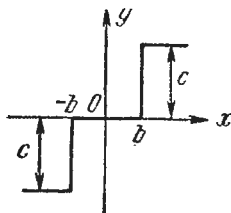


Рис. 258. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 403.

части системы $k = 0,82 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = T_2 = 0,05 \text{ сек}$ и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 258), для которой $b = 0,25$, $c = 110$.

Решение. Построим амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы $W_A(j\omega)$

и годограф гармонически линеаризованного нелинейного звена $-Z(a) = -\frac{1}{W_n(a)}$.

Согласно структурной схеме частотная передаточная функция линейной части системы

$$W_n(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)},$$

ее модуль

$$|W_n(j\omega)| = \frac{k}{\omega \sqrt{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}}$$

и фаза

$$\psi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2.$$

После подстановки численных значений параметров получим

$$|W_n(j\omega)| = \frac{0,82}{\omega(1+0,0025\omega^2)}, \quad (1)$$

$$\psi(\omega) = -90^\circ - 2 \arctg 0,05\omega. \quad (2)$$

Задаемся значениями ω от 0 до ∞ и по формулам (1) и (2) строим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $W_n(j\omega)$ (рис. 259).

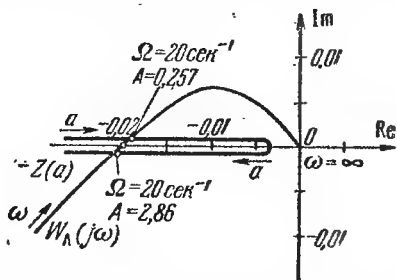


Рис. 259. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена к задаче 403.

Гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена согласно приложению 28 равна

$$W_n(a) = q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad a \geq b.$$

Отсюда

$$-Z(a) = -\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

После подстановки численных значений параметров нелинейного звена получим

$$-Z(a) = -\frac{\pi a^2}{440} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 0,0625}}. \quad (3)$$

Задаемся значениями a от $a = b = 0,25$ до ∞ и строим годограф нелинейного звена $-Z(a)$ (рис. 259). В данном случае этот годограф совпадает с отрицательной вещественной полуосью и имеет две ветви. Минимальное значение модуля функции $-Z(a)$

$$|Z(a)|_{\min} = \frac{\pi b}{2c} = \frac{\pi \cdot 0,25}{2 \cdot 110} \approx 0,0036$$

достигается при $a' = b \sqrt{2} \approx 0,352$.

Годографы $W_L(j\omega)$ и $-Z(a)$ пересекаются в двух точках. Это означает, что уравнение

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)} = -Z(a)$$

имеет два периодических решения,

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \sin \Omega t, \\ x &= A_2 \sin \Omega t, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где согласно рис. 259 $\Omega = 20 \text{ сек}^{-1}$; $A_1 = 0,257$, $A_2 = 2,86$.

Для устойчивости периодического решения требуется, чтобы амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W_L(j\omega)$ охватывала часть годографа $-Z(a)$, соответствующую меньшим амплитудам. Поэтому первое из решений (4) является неустойчивым, а второе — устойчивым. Следовательно, в системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A = 2,86$ и частотой $\Omega = 20 \text{ сек}^{-1}$.

$$x = 2,86 \sin 20t.$$

404. Решить предыдущую задачу, если:

- 1) $k = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$, $b = 0,25$, $c = 110$;
- 2) $k = 4 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,01 \text{ сек}$, $T_2 = 0,08 \text{ сек}$, $b = 0,25$, $c = 110$;
- 3) $k = 0,5 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $T_2 = 0,01 \text{ сек}$, $b = 0,5$, $c = 110$;
- 4) $k = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,05 \text{ сек}$, $b = 0,1$, $c = 40$;
- 5) $k = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$, $b = 0,25$, $c = 11$.

Ответ.

- 1) $A \approx 4$, $\Omega \approx 31,6 \text{ сек}^{-1}$;
- 2) $A \approx 5$, $\Omega \approx 35,3 \text{ сек}^{-1}$;
- 3) Система устойчива, автоколебания отсутствуют;
- 4) $A \approx 2,55$, $\Omega \approx 20 \text{ сек}^{-1}$;
- 5) Система устойчива, автоколебания отсутствуют.

405. Исследовать устойчивость состояния равновесия системы, структурная схема которой изображена на

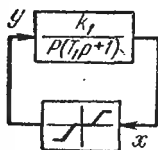


Рис. 260. Структурная схема системы к задаче 405.

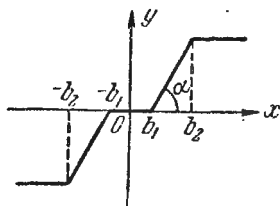


Рис. 261. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 405.

рис. 260, если заданы параметры линейной части системы $k_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$ и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 261), для которой $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,3$, $k = \tan \alpha = 5$.

Ответ. Годографы $W_{\lambda}(j\omega)$ и $-Z(a)$ не пересекаются. Следовательно, состояние равновесия системы устойчиво, автоколебания отсутствуют.

406. Исследовать устойчивость состояния равновесия электромеханической следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 211, если заданы параметры линейных звеньев: $k_1 = 57,3$ в/рад, $k_2 = 2,5$, $k_3 = 5,73$ рад/в · сек, $k_4 = 10^{-2}$ в · сек/рад, $k_5 = 0,001$, $T_1 = 0,05$ сек, $T_m = 0,05$ сек, и статическая характеристика нелинейного звена (см. рис. 210), для которой $b = 0,25$ в, $U_{3\max} = c = 110$ в.

Решение. По заданной структурной схеме определим передаточную функцию линейной части системы $W_{\lambda}(p)$ и гармонически линеаризованную передаточную

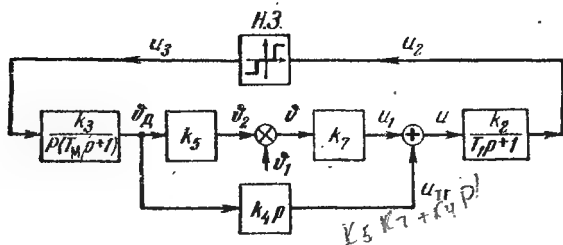


Рис. 262. Преобразованная структурная схема к задаче 406.

функцию нелинейного звена $W_{\lambda}(a)$. Для этого структурную схему нелинейной системы представим в виде последовательного соединения нелинейного звена и линейной части системы (рис. 262).

Согласно рис. 262

$$W_{\lambda}(p) = \frac{k_2 k_3 (k_4 p + k_1 k_5)}{p (T_1 p + 1) (T_m p + 1)} = \frac{k (\tau p + 1)}{p (T_1 p + 1) (T_m p + 1)}, \quad (1)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_5$ — коэффициент передачи линейной части системы, $\tau = \frac{k_4}{k_1 k_5}$ — постоянная времени.

Гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена, имеющего однозначную стати-

ческую характеристику, может быть записана в виде

$$W_n(a) = \dot{q}(a), \quad (2)$$

где $q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}$ (см. приложение 28).

По передаточной функции (1) определяем частотную передаточную функцию

$$W_n(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega\tau)}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{0,82(1 + 0,174j\omega)}{j\omega(1 + 0,05j\omega)^2}, \quad (3)$$

ее модуль

$$|W_n(j\omega)| = \frac{0,82 \sqrt{1 + 0,0305\omega^2}}{\omega(1 + 0,0025\omega^2)} \quad (4)$$

и фазу

$$\psi(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg} 0,174\omega - 2 \operatorname{arctg} 0,05\omega. \quad (5)$$

По формулам (4) и (5) строим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы (рис. 263) и годограф нелинейного звена

$$\begin{aligned} -Z(a) &= -\frac{1}{W_n(a)} = \\ &= -\frac{\pi a^2}{4c} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \\ &= \frac{\pi a^2}{440} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 0,0625}} \end{aligned} \quad (6)$$

при значениях амплитуд $b < a < \infty$. В данном случае этот годограф совпадает с отрицательной вещественной полуосью и имеет две ветви. Минимальное значение модуля функции $-Z(a)$

$$|-Z(a)|_{\min} = \frac{\pi b}{2c} = \frac{\pi \cdot 0,25}{2 \cdot 110} \approx 0,0036$$

достигается при $a = b\sqrt{2} \approx 0,352$ в.

Как видно из рис. 263, годографы $W_n(j\omega)$ и $-Z(a)$ не имеют общих точек пересечения. Следовательно, состояние равновесия рассматриваемой системы устойчиво.

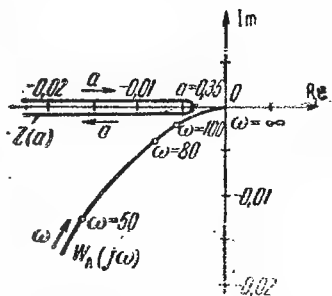


Рис. 263. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена к задаче 406.

407. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 264. Параметры линейной части системы: $T_1 = 1,0$ сек, $T_2 = 0,9$ сек, $T_3 = 1,1$ сек, $k_1 = 0,5$, $k_2 = 5$.

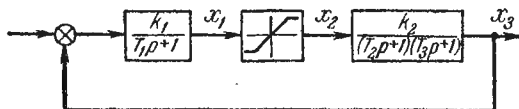


Рис. 264. Структурная схема системы к задаче 407.

Статическая характеристика нелинейного звена изображена на рис. 265, где $b = 1$, $k_3 = 4$.

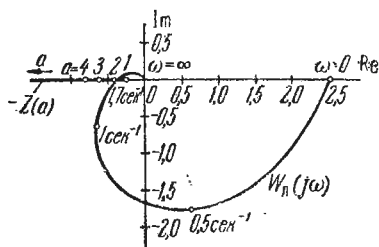
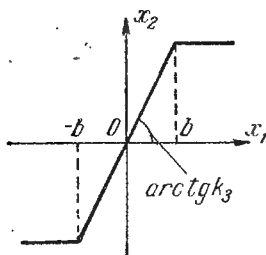


Рис. 265. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 407.

Рис. 266. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена к задаче 407.

Ответ. В системе устанавливаются автоколебания

$$x_1 = A \sin \Omega t,$$

где $A \approx 1,8$, $\Omega \approx 1,7$ сек⁻¹. Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W_n(j\omega)$ и годограф нелинейного звена $-Z(a)$ показаны на рис. 266.

408. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 267. Параметры линейной части системы: $k_1 = 2$, $k_2 = 10$ сек⁻¹, $T = 0,02$ сек, $\xi = 0,15$. Статическая характеристика нелинейного звена изображена на рис. 268.

Ответ. В системе устанавливаются автоколебания

$$x_1 = A \sin \Omega t,$$

где $A \approx 8,5$, $\Omega \approx 50 \text{ сек}^{-1}$. Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W_n(j\omega)$ и годограф нелинейного звена $-Z(a)$ изображены на рис. 269.

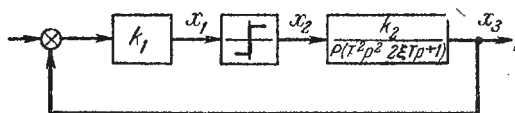


Рис. 267. Структурная схема системы к задаче 408.

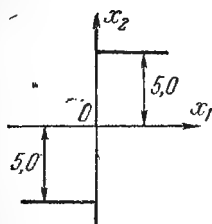


Рис. 268. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 408.

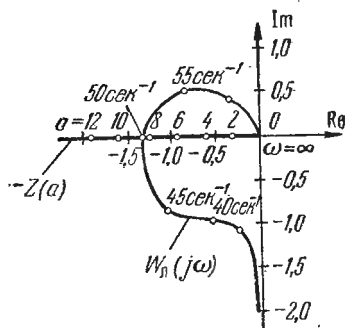


Рис. 269. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена к задаче 408.

409. Исследовать устойчивость состояния равновесия электромеханической следящей системы, рассмотренной в задаче 406, если статическая характеристика нелинейного звена имеет петлю гистерезиса (рис. 270).

Решение. Согласно структурной схеме (см. рис. 262) передаточная функция линейной части системы при исходных данных задачи 406 равна

$$W_n(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_M p + 1)} = \frac{0,82(0,174p + 1)}{p(0,05p + 1)^2} \quad (1)$$

Частотная передаточная функция нелинейного звена, имеющего неоднозначную статическую характеристику, может быть записана в виде

$$W_H(a) = q(a) + jq'(a), \quad (2)$$

где для релейной характеристики с гистерезисной петлей (рис. 270) в соответствии с приложением 28

$$\left. \begin{aligned} q(a) &= \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, & a \geq b, \\ q'(a) &= -\frac{4cb}{\pi a^2}, & a \geq b. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Годограф нелинейного звена $-Z(a)$, построенный по выражению

$$-Z(a) = -\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a}{4c} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + j \frac{b}{a} \right), \quad (4)$$

изображен на рис. 271. На этом же рисунке построена амплитудно-фазовая характеристика линейной части

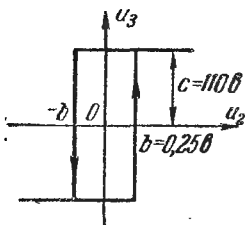


Рис. 270. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 409.

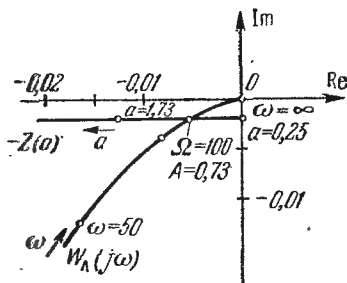


Рис. 271. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена к задаче 409.

системы $W_L(j\omega)$, которая полностью совпадает с построенной на рис. 263.

Точка пересечения этих двух кривых определяет периодическое решение в системе

$$u_2 = A \sin \Omega t, \quad (5)$$

где $A \approx 0,73$ в, $\Omega \approx 100$ сек⁻¹. Согласно рис. 271 найденное периодическое решение является устойчивым, т. е. A и Ω являются амплитудой и частотой автоколебаний.

410. Исследовать устойчивость состояния равновесия системы, структурная схема которой изображена на рис. 272, если задан коэффициент передачи линейной части системы $k = 10$ сек⁻¹ и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 273), для которой $b = 0,5$, $c = 10$.

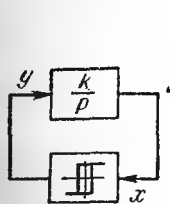


Рис. 272. Структурная схема системы к задаче 409.

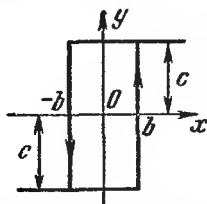


Рис. 273. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 410.

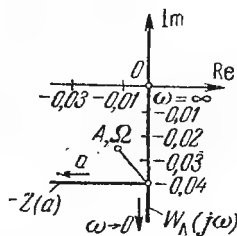


Рис. 274. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена к задаче 410.

Ответ: В системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A = b = 0,5$ и частотой $\Omega = 255$ сек⁻¹.

Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W_A(j\omega)$ и годограф нелинейного звена $-Z(a)$ изображены на рис. 274.

411. Решить ту же задачу, если

- 1) $k = 2$ сек⁻¹, $b = 0,5$, $c = 5$;
- 2) $k = 1$ сек⁻¹, $b = 0,25$, $c = 5$;
- 3) $k = 1$ сек⁻¹, $b = 0,5$, $c = 5$.

Ответ.

- 1) $A = 0,5$, $\Omega = 25,5$ сек⁻¹;
- 2) $A = 0,25$, $\Omega = 25,5$ сек⁻¹;
- 3) $A = 0,5$, $\Omega = 63,7$ сек⁻¹.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 14.1. Исследование колебательных переходных процессов аналитическими методами

412. Для электромеханической следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 211, построить диаграмму качества переходного процесса по коэффициенту передачи разомкнутой системы $k = k_1 k_2 k_3 k_5$ при отключенной местной скоростной обратной связи ($k_4 = 0$).

Исходные данные: $T_1 = 0,05$ сек, $T_m = 0,1$ сек, ширина зоны нечувствительности релейного усилителя (см. рис. 210) $b = 1$ е, максимальное напряжение на выходе релейного усилителя $U_{3 \max} = c = 100$ в.

Решение. Согласно структурной схеме (см. рис. 211) передаточная функция гармонически линеаризованной разомкнутой системы равна

$$W(p, a) = \frac{kq(a)}{p(T_1 p + 1)(T_m p + 1)}, \quad (1)$$

где $q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ — коэффициент гармонической линеаризации для релейной характеристики с зоной нечувствительности (см. приложение 28). По передаточной функции (1) определяем характеристический полином замкнутой нелинейной системы

$$D(p, a) = T_1 T_m p^3 + (T_1 + T_m) p^2 + p + kq(a). \quad (2)$$

Для построения диаграммы качества в полиноме (2) произведем подстановку $p = \xi + j\omega$ (ξ — показатель затухания). Эту подстановку удобно выполнять путем

разложения полинома $D(p, a)$ в ряд по степеням $j\omega$

$$D(\xi + j\omega) = \\ = D(\xi) + \left(\frac{dD}{dp}\right)_{\xi} j\omega + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2D}{dp^2}\right)_{\xi} (j\omega)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3D}{dp^3}\right)_{\xi} (j\omega)^3 + \dots, \quad (3)$$

где индекс ξ означает, что в выражения для производных необходимо подставить ξ вместо p .

Из (2) находим

$$\left. \begin{aligned} D(\xi) &= T_1 T_M \xi^3 + (T_1 + T_M) \xi^2 + \xi + kq(a), \\ \left(\frac{dD}{dp}\right)_{\xi} &= 3T_1 T_M \xi^2 + 2(T_1 + T_M) \xi + 1, \\ \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2D}{dp^2}\right)_{\xi} &= 3T_1 T_M \xi + (T_1 + T_M), \\ \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3D}{dp^3}\right)_{\xi} &= T_1 T_M. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставим выражения (4) в ряд (3), выделим в последнем вещественную и мнимую части и приравняем их нулю. Получим

$$\begin{aligned} X(\omega, a, \xi) &= T_1 T_M \xi^3 + (T_1 + T_M) \xi^2 + \xi + kq(a) - \\ &\quad - [3T_1 T_M \xi + (T_1 + T_M)] \omega^2 = 0, \quad (5) \\ Y(\omega, \xi) &= [3T_1 T_M \xi^2 + 2(T_1 + T_M) \xi + 1 - T_1 T_M \omega^2] \omega = 0. \end{aligned}$$

Из уравнений (5) исключим частоту колебаний ω . Для этого из второго уравнения (5) находим

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_M} [3T_1 T_M \xi^2 + 2(T_1 + T_M) \xi + 1]. \quad (6)$$

Подставим значение ω^2 в первое уравнение (5). Получим

$$\begin{aligned} T_1 T_M \xi^3 + (T_1 + T_M) \xi^2 + \xi + kq(a) &= \\ = \frac{1}{T_1 T_M} [3T_1 T_M \xi^2 + 2(T_1 + T_M) \xi + 1] [3T_1 T_M \xi + (T_1 + T_M)]. \quad (7) \end{aligned}$$

Уравнение (7) решаем относительно k . В результате находим

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{q(a)} \left\{ \frac{1}{T_1 T_M} [3T_1 T_M \xi^2 + 2(T_1 + T_M) \xi + 1] \times \right. \\ &\quad \times [3T_1 T_M \xi + (T_1 + T_M)] - T_1 T_M \xi^3 - (T_1 + T_M) \xi^2 - \xi \left. \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

В выражение (8) подставим численные значения параметров. Получим

$$k = \frac{\pi a^2}{400\sqrt{a^2 - 1}} (0,04\xi^3 + 1,2\xi^2 + 11\xi + 30). \quad (9)$$

Задаемся различными значениями амплитуды колебаний a и при выбранных постоянных значениях показателя затухания ξ строим кривые $a = a(k)$ (рис. 275).

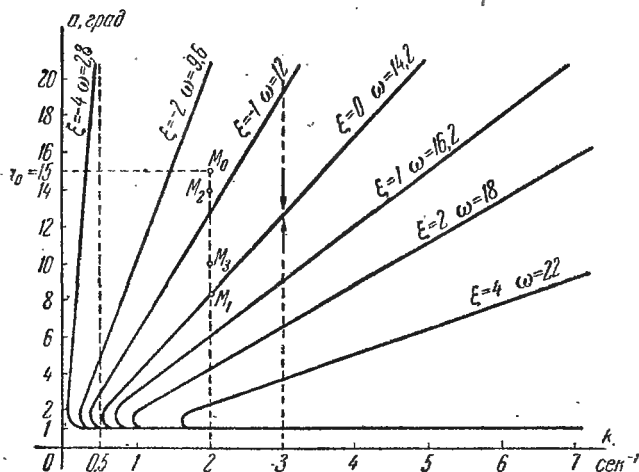


Рис. 275. Диаграмма качества переходного процесса к задаче 412.

Согласно формуле (6) частота колебаний ω не зависит от k и a . Поэтому кривые $\omega = \text{const}$ будут совпадать с кривыми $\xi = \text{const}$. Кривая $\xi = 0, \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_m}} \simeq 14,2 \text{ сек}^{-1}$

соответствует автоколебаниям в системе и представляет собой зависимость амплитуды автоколебаний $a = A$ от коэффициента передачи разомкнутой системы k . Кривые $\xi > 0$ соответствуют расходящимся колебаниям, а кривые $\xi < 0$ — затухающим колебаниям. Область, лежащая правее пунктирной прямой, проходящей через точку $k \approx 0,5 \text{ сек}^{-1}$, является областью существования автоколебаний. Область, расположенная левее этой пря-

мой, является областью устойчивого равновесного состояния системы.

413. Для системы, рассмотренной в задаче 412, исследовать устойчивость состояния равновесия и определить амплитуду A и частоту Ω автоколебаний, если

$$1) k = 0,4 \text{ сек}^{-1};$$

$$2) k = 2 \text{ сек}^{-1};$$

$$3) k = 4 \text{ сек}^{-1}.$$

Ответ. Согласно диаграмме качества (см. рис. 275) имеем

1) состояние равновесия системы устойчиво;

$$2) A \approx 8,3^\circ, \Omega = 14,2 \text{ сек}^{-1};$$

$$3) A \approx 17^\circ, \Omega = 14,2 \text{ сек}^{-1}.$$

414. Для системы, рассмотренной в задаче 412, при $k = 2 \text{ сек}^{-1}$ определить время затухания переходного процесса t_1 , число колебаний m в переходном процессе за время t_1 , величину перерегулирования a_n , если начальное значение амплитуды колебаний $a_0 = 15^\circ$.

Решение. Из диаграммы качества переходных процессов (см. рис. 275) видно, что коэффициент затухания ξ и частота колебаний ω во время переходного процесса не остаются постоянными. Выражение для амплитуды колебаний системы имеет вид

$$a = a_0 e^{-\int_0^t \xi dt}, \quad (1)$$

где a_0 — значение амплитуды колебаний, определяемое начальными условиями. Согласно рис. 275 при $k = 2 \text{ сек}^{-1}$ в системе устанавливают автоколебания с амплитудой $A \approx 8,3 \text{ град}$. Из выражения (1) определяем время затухания переходного процесса t_1 от амплитуды a_0 до амплитуды A

$$t_1 = \int_{a_n}^A \frac{da}{a\xi(a)}, \quad (2)$$

где $\xi(a)$ — аналитическая зависимость коэффициента затухания ξ от амплитуды колебаний a при заданном k .

Зависимость $\xi(a)$ имеет сложный вид (см. задачу 412) и поэтому точное вычисление интеграла (2) затруднено.

Время затухания переходного процесса можно оценить приближенно следующим образом [25]. Грубую оценку времени t_1 производим по формуле

$$t_1 \approx \frac{1}{\xi_{\text{ср}}} \ln \frac{A}{a_0}, \quad (3)$$

где $\xi_{\text{ср}}$ — среднее значение коэффициента затухания ξ на интервале изменения амплитуды колебаний от $a = a_0$ (точка M_0 на рис. 275) до $a = A$ (точка M_1 на рис. 275). Если принять, что в точке M_0 $\xi \simeq -1,5$, а в точке M_1 $\xi = 0$, то

$$\xi_{\text{ср}} \simeq \frac{-1,5 + 0}{2} = -0,75.$$

Поэтому

$$t_1 \approx \frac{1}{-0,75} \ln \frac{8,3}{15} \approx 0,79 \text{ сек.} \quad (4)$$

Для более точного определения времени затухания переходного процесса разобьем участок M_0M_1 (рис. 275) на три отрезка, M_0M_2 , M_2M_3 , M_3M_1 , и определим значение ξ внутри каждого отрезка: $\xi_1 = \xi_0 = -1,5$, $\xi_2 = -1,0$, $\xi_3 = -0,5$. Тогда

$$t_1 \approx \frac{1}{\xi_1} \ln \frac{a_2}{a_0} + \frac{1}{\xi_2} \ln \frac{a_3}{a_2} + \frac{1}{\xi_3} \ln \frac{A}{a_3}, \quad (5)$$

где a_2 и a_3 — значения амплитуд колебаний в точках M_2 и M_3 .

Подставим в (5) численные значения параметров. Получим

$$t_1 \approx \frac{1}{-1,5} \ln \frac{14}{15} + \frac{1}{-1,0} \ln \frac{10}{14} + \frac{1}{-0,5} \ln \frac{8,3}{10} \approx 0,74 \text{ сек.}$$

Грубую оценку величины перерегулирования производим по формуле

$$\left| \frac{a_{\text{п}}}{a_0} \right| \simeq e^{\pi \frac{\xi_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}}} \quad (\xi_{\text{ср}} < 0), \quad (6)$$

где $\xi_{\text{ср}}$ и $\omega_{\text{ср}}$ — средние значения величин ξ и ω на участке M_0M_1 , a_0 — начальное значение амплитуды колебаний.

По формуле (6) находим (положив $\omega_{\text{ср}} = \frac{10,2 + 14,2}{2} = 12,4 \text{ сек}^{-1}$)

$$a_n = 15e^{-\pi \frac{0,75}{12,4}} \approx 12,4^\circ.$$

Грубую оценку числа колебаний m за время переходного процесса производим по формуле

$$m \approx \frac{\omega_{\text{ср}}}{2\pi\xi_{\text{ср}}} \ln \frac{A}{a_0}, \quad (7)$$

откуда

$$m \approx \frac{12,4}{-2\pi \cdot 0,75} \ln \frac{8,3}{15} \approx 1,5.$$

415. Для системы, рассмотренной в задаче 412, произвести грубую оценку времени затухания переходного процесса и числа колебаний за время переходного процесса, если

- 1) $k = 2 \text{ сек}^{-1}, \quad a_0 = 2^\circ;$
- 2) $k = 3 \text{ сек}^{-1}, \quad a_0 = 15^\circ;$
- 3) $k = 3 \text{ сек}^{-1}, \quad a_0 = 4^\circ.$

Ответ. Согласно диаграмме качества переходного процесса (см. рис. 275) имеем

- 1) $t_1 \approx 0,71 \text{ сек}, \quad m \approx 2;$
- 2) $t_1 \approx 0,68 \text{ сек}, \quad m \approx 1,5;$
- 3) $t_1 \approx 0,71 \text{ сек}, \quad m \approx 1,6.$

416. Для электромеханической следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 211, построить диаграмму качества переходного процесса по коэффициенту передачи разомкнутой системы $k = k_1 k_2 k_3 k_5$ при отключенной местной скоростной обратной связи ($k_4 = 0$), если вместо релейного усилителя применяется усилитель с насыщением. Статическая характеристика усилителя изображена на рис. 276.

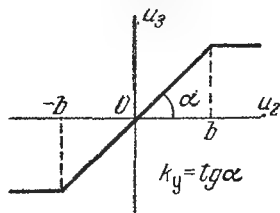


Рис. 276. Статическая характеристика усилителя следящей системы к задаче 416.

Исходные данные: $T_1 = 0,05$ сек, $T_m = 0,1$ сек, ширина зоны линейности статической характеристики нелинейного усилителя $b = 1$ в, коэффициент усиления на линейном участке $k_y = \operatorname{tg} \alpha = 100$.

Ответ. Диаграмма качества переходного процесса изображена на рис. 277. Кривые $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ совпадают. Границей областей устойчивого состояния равновесия и автоколебаний является пунктирная прямая, проведенная через точку $k \approx 0,3 \text{ сек}^{-1}$.

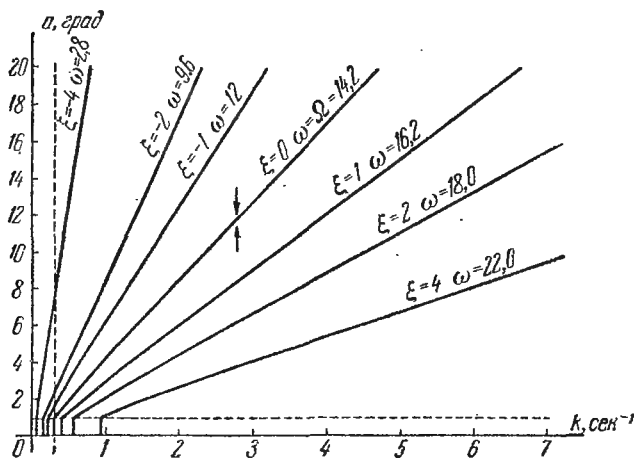


Рис. 277. Диаграмма качества переходного процесса к задаче 416.

417. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 278, построить диаграмму качества переходного процесса по коэффициенту передачи k .

Исходные данные: $k_{oc} = 5$, $T_1 = T_2 = 0,1$ сек, $c = 10$.

Решение. Согласно структурной схеме передаточная функция линеаризованной нелинейной разомкнутой системы равна

$$W(p, a) = \frac{kq(a)}{(T_1 p + 1)[p(T_2 p + 1) + k_{oc}q(a)]}, \quad (1)$$

где $q(a) = \frac{4c}{\pi a}$ — коэффициент гармонической линеаризации для идеальной релейной характеристики (см. приложение 28).

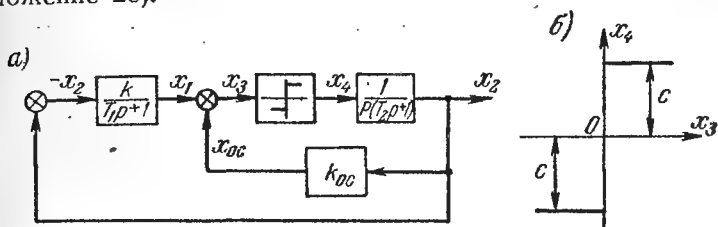


Рис. 278. Структурная схема системы и статическая характеристика нелинейного звена к задаче 417.

По передаточной функции (1) определяем характеристический полином замкнутой нелинейной системы

$$D(p, a) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + k_{oc} q(a) T_1) p + q(a) (k + k_{oc}). \quad (2)$$

Полином (2) запишем в виде

$$D(p, a) = p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3, \quad (3)$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{0,1 + 0,1}{0,01} = 20,$$

$$A_2 = \frac{1 + k_{oc} T_1 q(a)}{T_1 T_2} = \frac{1 + 0,1 k_{oc} q(a)}{0,01} = 100 + 50 q(a),$$

$$A_3 = \frac{(k + k_{oc}) q(a)}{T_1 T_2} = \frac{(k + 5) q(a)}{0,01} = (100k + 500) q(a).$$

Для системы третьего порядка, характеристический полином которой приведен к виду (3), формулы для коэффициента затухания ξ и частоты колебаний ω можно записать в виде [39]

$$\xi = - \frac{A_1 A_2 - A_3}{2 [A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]}, \quad (4)$$

$$\omega^2 = \frac{A_3}{A_1 + 2\xi} - \xi^2. \quad (5)$$

Чтобы ξ и ω , полученные по этим формулам, определяли в основном переходный процесс, должно выполняться

условие

$$A_1 \gg |\xi|. \quad (6)$$

Неравенство (6) определяет верхний и нижний пределы для значений ξ , которые должны подставляться в формулы (4) и (5).

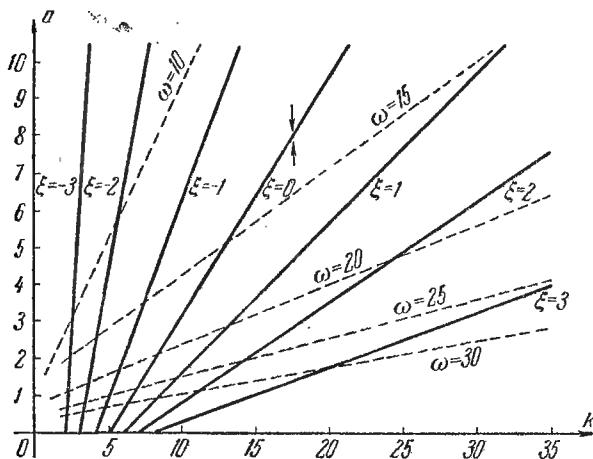


Рис. 279. Диаграмма качества переходного процесса к задаче 417.

Подставим в (4) и (5) значения коэффициентов A_1 , A_2 , A_3 , $q(a)$ и полученные уравнения разрешим относительно k и ω^2 . Получим

$$k = 5 + \xi + 0,157a(10 + 5\xi + 0,8\xi^2 + 0,04\xi^3), \quad (7)$$

$$\omega^2 = \frac{12,7}{a} \frac{50k + 250}{10 + \xi} - \xi^2. \quad (8)$$

Задаемся различными постоянными значениями коэффициента затухания ξ и по формуле (7) строим кривые $a = a(k)$ (рис. 279). По формуле (8) строим кривые $\omega = \text{const}$ (пунктирные прямые на рис. 279). С меньшей точностью, но гораздо быстрее эти кривые могут быть построены по формуле

$$\omega^2 \approx \frac{A_3}{A_1}, \quad (9)$$

которая получается из (5) при выполнении условия (6). Из рис. 279 следует, что на диаграмме качества переходных процессов можно выделить две области: область устойчивого состояния равновесия при $k < 5$, где амплитуда колебаний затухает до нуля, и область автоколебаний при $k > 5$. Эти данные полностью совпадают с данными, полученными при исследовании той же системы точным методом Ляпунова — Лурье (см. задачу 388).

418. Для системы, рассмотренной в задаче 417, построить диаграмму качества переходного процесса, если нелинейное звено (см. рис. 278, а) имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 280).

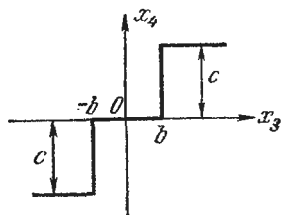


Рис. 280. Статическая характеристика нелинейного звена к задаче 418.

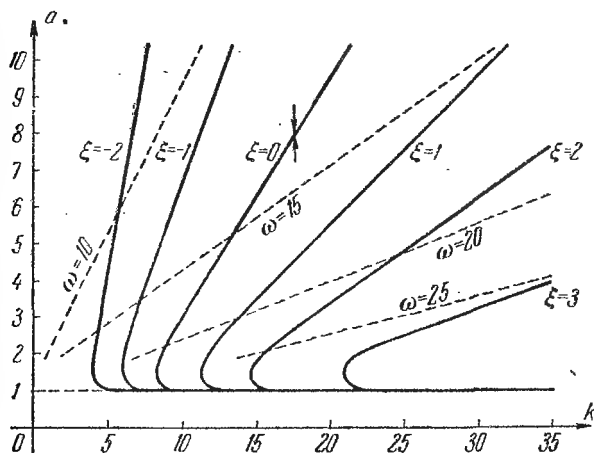


Рис. 281. Диаграмма качества переходного процесса к задаче 418.

Исходные данные те же, что и в задаче 417. Ширина зоны нечувствительности $b = 1,0$.

Ответ. Диаграмма качества переходного процесса отображена на рис. 281. Из этой диаграммы видно, что наличие зоны нечувствительности в релейной характеристике приводит к некоторому расширению области устойчивого состояния равновесия, соответствующей $k < 8,25$.

§ 14.2. Исследование колебательных переходных процессов частотными методами

419. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 282, определить качество переходного процесса.

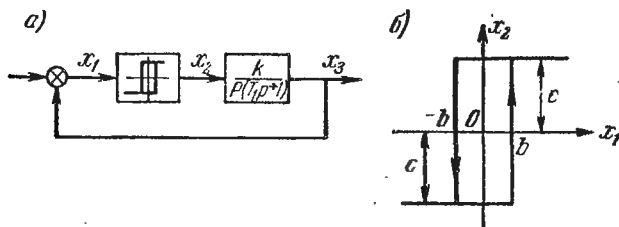


Рис. 282. Структурная схема системы и статическая характеристика нелинейного звена к задаче 419.

Исходные данные: $k = 0,5$, $T_1 = 0,1$ сек, $b = 1$, $c = 20$.

Решение. Коэффициент затухания ξ и частоту колебаний ω переходного процесса в нелинейной системе будем отыскивать путем решения гармонически линеаризованного уравнения

$$W_n(\xi + j\omega) \cdot W_n(a) = -1 \quad (1)$$

или

$$W_n(\xi + j\omega) = -\frac{1}{W_n(a)} = -Z(a), \quad (2)$$

где $W_n(\xi + j\omega)$ получается из передаточной функции линейной части системы $W_n(p)$ подстановкой $p = \xi + j\omega$, а гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена $W_n(a)$ — подстановкой $p = \xi + j\omega$ в выражение

$$W_n(\xi, a) = q(a) + \frac{p - \xi}{\omega} q'(a), \quad (3)$$

в результате которой получаем

$$W_n(\xi, a) = q(a) + jq'(a) = W_n(a). \quad (4)$$

Уравнение (1) будем решать графически. Для этого в передаточной функции линейной части системы

$$W_n(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)} \quad (5)$$

произведем подстановку $p = \xi + j\omega$. Получим

$$W_n(\xi + j\omega) = \frac{k}{(\xi + j\omega)(1 + T_1 \xi + j\omega T_1)}. \quad (6)$$

Модуль этой функции

$$A(\xi, \omega) = |W_n(\xi + j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\xi^2 + \omega^2)[(1 + T_1 \xi)^2 + \omega^2 T_1^2]}} \quad (7)$$

и фаза

$$\psi(\xi, \omega) = -\arctg \frac{\omega}{\xi} - \arctg \frac{\omega T_1}{1 + T_1 \xi}. \quad (8)$$

Подставим в выражения (7) и (8) приведенные в исходных данных значения параметров и, задаваясь различными постоянными значениями показателя затухания ξ , построим серию кривых $W_n(\xi, j\omega)$ как функции от частоты колебаний ω при $\xi = \text{const}$ (рис. 283).

На этом же графике нанесем обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена $-Z(a) = -\frac{1}{W_n(a)}$ при заданных параметрах звена b и c . Согласно приложению 28 для нелинейной характеристики релейного типа с гистерезисной петлей имеем

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - j \frac{4cb}{\pi a^2}. \quad (9)$$

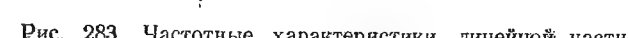
Отсюда

$$-Z(a) = -\frac{1}{W_n(a)} = -\frac{\pi a}{4c} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - j \frac{\pi b}{4c}. \quad (10)$$

Мнимая часть выражения (10) не зависит от амплитуды a . Поэтому годограф $-Z(a)$ представляет собой прямую, параллельную вещественной оси.

Точки пересечения годографов $W_n(\xi + j\omega)$ и $-Z(a)$ определяют решения уравнения (1) при различных

▲ Im


$$A = 1.51 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1} \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1}$$

1150 1155 1160 1165 1170 1175 1180 1185 1190 1195 1200 1205 1210 1215 1220 1225 1230 1235 1240 1245 1250 1255 1260 1265 1270 1275 1280 1285 1290 1295 1300 1305 1310 1315 1320 1325 1330 1335 1340 1345 1350 1355 1360 1365 1370 1375 1380 1385 1390 1395 1400 1405 1410 1415 1420 1425 1430 1435 1440 1445 1450 1455 1460 1465 1470 1475 1480 1485 1490 1495 1500 1505 1510 1515 1520 1525 1530 1535 1540 1545 1550 1555 1560 1565 1570 1575 1580 1585 1590 1595 1600 1605 1610 1615 1620 1625 1630 1635 1640 1645 1650 1655 1660 1665 1670 1675 1680 1685 1690 1695 1700 1705 1710 1715 1720 1725 1730 1735 1740 1745 1750 1755 1760 1765 1770 1775 1780 1785 1790 1795 1800 1805 1810 1815 1820 1825 1830 1835 1840 1845 1850 1855 1860 1865 1870 1875 1880 1885 1890 1895 1900 1905 1910 1915 1920 1925 1930 1935 1940 1945 1950 1955 1960 1965 1970 1975 1980 1985 1990 1995 2000 2005 2010 2015 2020 2025 2030 2035 2040 2045 2050 2055 2060 2065 2070 2075 2080 2085 2090 2095 2100 2105 2110 2115 2120 2125 2130 2135 2140 2145 2150 2155 2160 2165 2170 2175 2180 2185 2190 2195 2200 2205 2210 2215 2220 2225 2230 2235 2240 2245 2250 2255 2260 2265 2270 2275 2280 2285 2290 2295 2300 2305 2310 2315 2320 2325 2330 2335 2340 2345 2350 2355 2360 2365 2370 2375 2380 2385 2390 2395 2400 2405 2410 2415 2420 2425 2430 2435 2440 2445 2450 2455 2460 2465 2470 2475 2480 2485 2490 2495 2500 2505 2510 2515 2520 2525 2530 2535 2540 2545 2550 2555 2560 2565 2570 2575 2580 2585 2590 2595 2600 2605 2610 2615 2620 2625 2630 2635 2640 2645 2650 2655 2660 2665 2670 2675 2680 2685 2690 2695 2700 2705 2710 2715 2720 2725 2730 2735 2740 2745 2750 2755 2760 2765 2770 2775 2780 2785 2790 2795 2800 2805 2810 2815 2820 2825 2830 2835 2840 2845 2850 2855 2860 2865 2870 2875 2880 2885 2890 2895 2900 2905 2910 2915 2920 2925 2930 2935 2940 2945 2950 2955 2960 2965 2970 2975 2980 2985 2990 2995 3000 3005 3010 3015 3020 3025 3030 3035 3040 3045 3050 3055 3060 3065 3070 3075 3080 3085 3090 3095 3100 3105 3110 3115 3120 3125 3130 3135 3140 3145 3150 3155 3160 3165 3170 3175 3180 3185 3190 3195 3200 3205 3210 3215 3220 3225 3230 3235 3240 3245 3250 3255 3260 3265 3270 3275 3280 3285 3290 3295 3300 3305 3310 3315 3320 3325 3330 3335 3340 3345 3350 3355 3360 3365 3370 3375 3380 3385 3390 3395 3400 3405 3410 3415 3420 3425 3430 3435 3440 3445 3450 3455 3460 3465 3470 3475 3480 3485 3490 3495 3500 3505 3510 3515 3520 3525 3530 3535 3540 3545 3550 3555 3560 3565 3570 3575 3580 3585 3590 3595 3600 3605 3610 3615 3620 3625 3630 3635 3640 3645 3650 3655 3660 3665 3670 3675 3680 3685 3690 3695 3700 3705 3710 3715 3720 3725 3730 3735 3740 3745 3750 3755 3760 3765 3770 3775 3780 3785 3790 3795 3800 3805 3810 3815 3820 3825 3830 3835 3840 3845 3850 3855 3860 3865 3870 3875 3880 3885 3890 3895 3900 3905 3910 3915 3920 3925 3930 3935 3940 3945 3950 3955 3960 3965 3970 3975 3980 3985 3990 3995 4000 4005 4010 4015 4020 4025 4030 4035 4040 4045 4050 4055 4060 4065 4070 4075 4080 4085 4090 4095 4100 4105 4110 4115 4120 4125 4130 4135 4140 4145 4150 4155 4160 4165 4170 4175 4180 4185 4190 4195 4200 4205 4210 4215 4220 4225 4230 4235 4240 4245 4250 4255 4260 4265 4270 4275 4280 4285 4290 4295 4300 4305 4310 4315 4320 4325 4330 4335 4340 4345 4350 4355 4360 4365 4370 4375 4380 4385 4390 4395 4400 4405 4410 4415 4420 4425 4430 4435 4440 4445 4450 4455 4460 4465 4470 4475 4480 4485 4490 4495 4500 4505 4510 4515 4520 4525 4530 4535 4540 4545 4550 4555 4560 4565 4570 4575 4580 4585 4590 4595 4600 4605 4610 4615 4620 4625 4630 4635 4640 4645 4650 4655 4660 4665 4670 4675 4680 4685 4690 4695 4700 4705 4710 4715 4720 4725 4730 4735 4740 4745 4750 4755 4760 4765 4770 4775 4780 4785 4790 4795 4800 4805 4810 4815 4820 4825 4830 4835 4840 4845 4850 4855 4860 4865 4870 4875 4880 4885 4890 4895 4900 4905 4910 4915 4920 4925 4930 4935 4940 4945 4950 4955 4960 4965 4970 4975 4980 4985 4990 4995 5000 5005 5010 5015 5020 5025 5030 5035 5040 5045 5050 5055 5060 5065 5070 5075 5080 5085 5090 5095 5100 5105 5110 5115 5120 5125 5130 5135 5140 5145 5150 5155 5160 5165 5170 5175 5180 5185 5190 5195 5200 5205 5210 5215 5220 5225 5230 5235 5240

Произведем грубую оценку основных качественных

Произведем грубую оценку основных качественных показателей переходного процесса. Пусть начальное значение амплитуды колебаний $a = a_0 = 2$. Время переходного процесса, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается от значения $a_0 = 2$ до значения

$A = 1,51$, приближенно оценим по формуле

$$t_1 \approx \frac{1}{\xi_{\text{ср}}} \ln \frac{A}{a_0}. \quad (11)$$

В данном случае $A = 1,51$, $a_0 = 2$, $\xi_{\text{ср}} = -1$. Подставим эти значения в (11). Получим

$$t_1 \approx -\ln \frac{1,51}{2} = 0,28 \text{ сек.}$$

Оценку величины перерегулирования произведем по формуле

$$a_{\text{п}} \approx a_0 e^{\pi \frac{\xi_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}}}, \quad (12)$$

где $a_{\text{п}}$ — величина перерегулирования, $\omega_{\text{ср}}$ — среднее

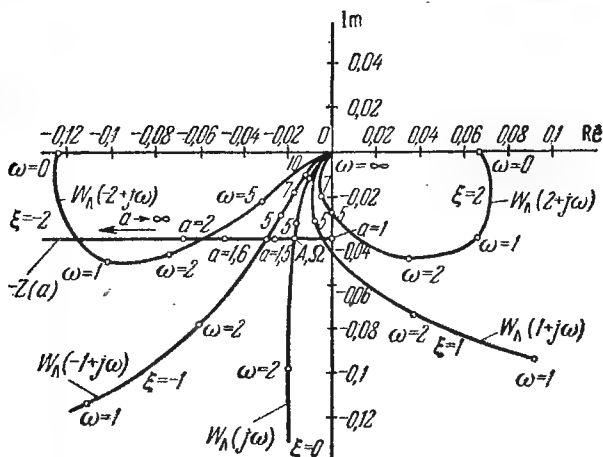


Рис. 284. Диаграмма качества переходного процесса к задаче 420.

значение частоты колебаний, которое согласно рис. 283 равно

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{7+8}{2} = 7,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Подставим в (12) значения параметров. Найдем

$$a_{\text{п}} = 2e^{-\pi \frac{1}{7,5}} = 2 \cdot 0,65 = 1,3.$$

Для грубой оценки числа колебаний за время переходного процесса воспользуемся формулой

$$m \approx \frac{\omega_{\text{ср}}}{2\pi\xi_{\text{ср}}} \ln \frac{A}{a_0} \approx \frac{7,5}{-2\pi} \ln \frac{1,51}{2} \approx 0,34.$$

420. Для системы, рассмотренной в задаче 419, построить диаграмму качества переходного процесса и определить основные качественные показатели процесса, если $k=0,2$, а остальные параметры такие же, как и в задаче 419. Начальное значение амплитуды колебаний $a_0=2$.

Ответ. Диаграмма качества переходного процесса изображена на рис. 284. Амплитуда и частота автоколебаний соответственно равны

$$A \approx 1,54, \quad \Omega \approx 4,5.$$

Время затухания переходного процесса от $a_0=2$ до $A=1,54$ $t_1 \approx 0,28$ сек. Величина перерегулирования $a_{\text{п}} \approx 0,88$. Число колебаний за время переходного процесса $m \approx 0,17$.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 15.1. Отыскание симметричных одночастотных вынужденных колебаний графическим методом

421. Определить вынужденные колебания системы, структурная схема которой изображена на рис. 285, при синусоидальном внешнем воздействии

$$f(t) = B \sin \omega_b t. \quad (1)$$

Исходные данные: $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $c = 10$, $B = 20$, $\omega_b = 10 \text{ сек}^{-1}$.

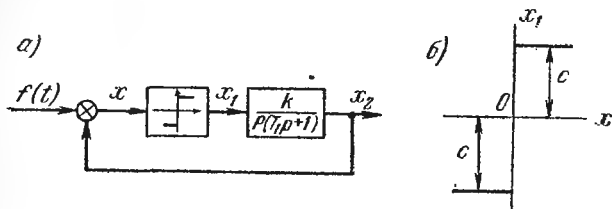


Рис. 285. Структурная схема системы и статическая характеристика нелинейного звена к задаче 421.

Решение. Составим дифференциальное уравнение замкнутой нелинейной системы. Согласно структурной схеме дифференциальное уравнение линейной части системы имеет вид

$$(T_1 p + 1) p x_2 = k x_1. \quad (2)$$

Нелинейное звено может быть описано уравнением

$$x_1 = F(x_2), \quad (3)$$

где нелинейная функция $F(x)$ задана статической характеристикой (рис. 285, б).

Подставим (3) в (2) и одновременно учтем, что

$$x_2 = f(t) - x.$$

Получим

$$(T_1 p + 1) p x + k F(x) = (T_1 p + 1) p f(t). \quad (4)$$

Решение для установившихся вынужденных колебаний в системе будем искать в форме

$$x = a_b \sin(\omega_b t + \varphi), \quad (5)$$

где a_b и φ — искомые амплитуда и фаза вынужденных колебаний.

Уравнение нелинейной системы (4) запишем в виде

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t), \quad (6)$$

где $Q(p) = S(p) = (T_1 p + 1)p$, $R(p) = k$. В уравнении (6) переменную $f(t)$ выразим через переменную x . Для этого запишем

$$\begin{aligned} f(t) &= B \sin \omega_b t = B \sin[(\omega_b t + \varphi) - \varphi] = \\ &= B \cos \varphi \sin(\omega_b t + \varphi) - B \sin \varphi \cos(\omega_b t + \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (5) найдем производную

$$p x = a_b \omega_b \cos(\omega_b t + \varphi) \quad (8)$$

и, подставив (5) и (8) в выражение (7), получим окончательно

$$f(t) = \frac{B}{a_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_b} p \right) x. \quad (9)$$

Подставим значение функции $f(t)$ (9) в уравнение (6). Получим

$$\left[Q(p) - S(p) \frac{B}{a_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_b} p \right) \right] x + R(p) F(x) = 0. \quad (10)$$

Произведем гармоническую линеаризацию нелинейности

$$F(x) = q(a) x, \quad (11)$$

где $q(a) = \frac{4c}{\pi a}$ — коэффициент гармонической линеаризации для идеальной релейной характеристики (см. приложение 28).

В выражение (11) вместо амплитуды a подставим искомую амплитуду вынужденных колебаний a_b . Получим

$$F(x) = q(a_b)x = \frac{4c}{\pi a_b} x. \quad (12)$$

Из (10) и (12) получаем характеристическое уравнение для первого приближения

$$Q(p) - S(p) \frac{B}{a_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_b} p \right) + R(p) q(a_b) = 0. \quad (13)$$

Для отыскания синусоидального решения (5) подставим в (13) $p = j\omega_b$. Получим

$$a_b \frac{Q(j\omega_b) + R(j\omega_b) q(a_b)}{S(j\omega_b)} = B e^{-j\varphi}. \quad (14)$$

При получении (14) учтено, что $\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi}$.

Подставим в (14) выражение для $Q(j\omega_b)$, $R(j\omega_b)$ и $S(j\omega_b)$, полученные из (6), и значение коэффициента $q(a_b)$ (12):

$$a_b + \frac{\frac{4ck}{\pi}}{j\omega_b(1 + T_1 j\omega_b)} = B e^{-j\varphi}. \quad (15)$$

После подстановки численных значений параметров получим

$$a_b - 6,67 - 6,67j = 20 e^{-j\varphi}. \quad (16)$$

На комплексной плоскости (рис. 286) построим годограф

$$Z(a_b) = a_b - 6,67 - 6,67j, \quad (17)$$

соответствующий левой части уравнения (16), и окружность радиуса $B = 20$, соответствующую правой части того же уравнения. Точка пересечения годографа $Z(a_b)$ и окружности определяет собой решение задачи. По отметкам амплитуды a_b на годографе $Z(a_b)$ находим амплитуду вынужденных колебаний в системе $a_b = A_b = 25,2$. Фазовый сдвиг $\varphi = 20^\circ$ определяется по дуге окружности. Следует иметь в виду, что отсчет положительных значений углов φ в данном случае производится от положительной вещественной полуоси по часовой стрелке, так как в правой части (15) φ входит с отрицательным знаком.

На рис. 286 видно, что в системе возникают одночастотные колебания с частотой $\omega_b = 10 \text{ сек}^{-1}$ не при любых значениях амплитуды входного воздействия (1), а лишь при $B > B_{\text{пор}}$. Для определения порогового значения амплитуды входного воздействия $B_{\text{пор}}$ проведем окружность, касающуюся годографа $Z(a_b)$. Радиус этой

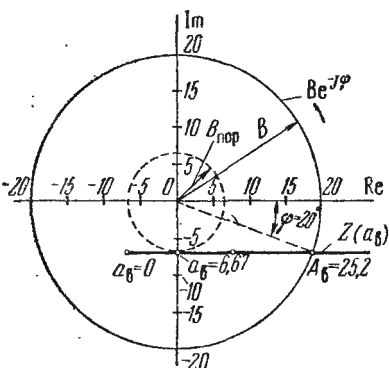


Рис. 286. Графическое построение для определения вынужденных колебаний к задаче 421.

окружности и определяет $B_{\text{пор}} = 6,67$.

422. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 287, определить амплитуду A_b и фазу φ вынужденных колебаний и пороговое значение амплитуды входного воздействия.

Исходные данные:

$$k = 10 \text{ сек}^{-1}, b = 1, c = 10,$$

амплитуда и частота входного воздействия $B = 8$, $\omega_b = 20 \text{ сек}^{-1}$.

Ответ. Уравнение для отыскания амплитуды и фазы вынужденных колебаний имеет вид

$$a_b - j \cdot 6,36 \sqrt{1 - \frac{1}{a_b^2}} = 8e^{-j\varphi}.$$

Графическое построение показано на рис. 288. Согласно этому рисунку $A_b \approx 5$, $\varphi = 50^\circ$, $B_{\text{пор}} = 1$.

423. Определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний в системе, структурная схема которой изображена на рис. 285, при наличии временного запаздывания τ .

Исходные данные: $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,01 \text{ сек}$, $\tau = 0,01 \text{ сек}$, $c = 10$; частота и амплитуда внешнего воздействия $\omega_b = 10 \text{ сек}^{-1}$, $B = 20$.

Решение. Линейная часть системы описывается дифференциальным уравнением

$$(T_1 p + 1) p x_2 = k x_1. \quad (1)$$

С учетом временного запаздывания τ уравнение нелинейного звена запишем в виде

$$x_1 = F_\tau(x) = e^{-\tau p} F(x), \quad (2)$$

где $F(x)$ — нелинейная функция, заданная статической характеристикой (рис. 285, б).

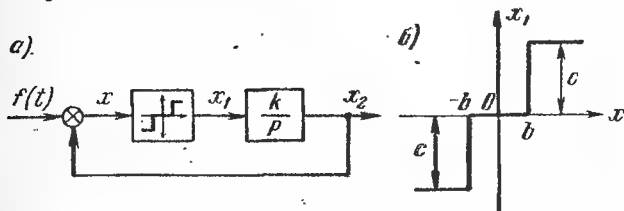


Рис. 287. Структурная схема системы и статическая характеристика нелинейного звена к задаче 422.

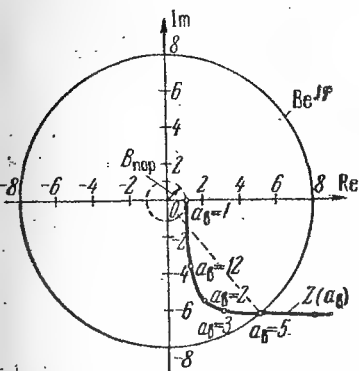


Рис. 288. Графическое построение для определения вынужденных колебаний к задаче 422.

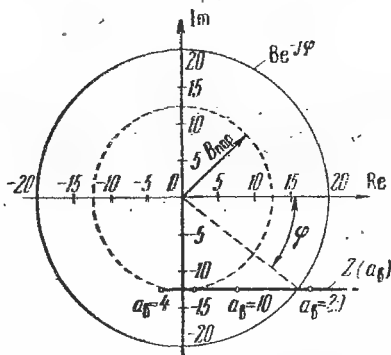


Рис. 289. Графическое построение для определения вынужденных колебаний к задаче 423.

Из (1) и (2) определим дифференциальное уравнение замкнутой нелинейной системы

$$(T_1 p + 1) p x + k F_\tau(x) = (T_1 p + 1) p f(t). \quad (3)$$

Вынужденные колебания входной величины нелинейного звена x будем искать в виде

$$x = A_b \sin(\omega_b t + \varphi). \quad (4)$$

Для отыскания синусоидального решения (4) запишем выражение

$$a_B \frac{Q(j\omega_B) + R(j\omega_B) q(a_B) e^{-j\tau\omega_B}}{S(j\omega_B)} = B e^{-j\varphi}, \quad (5)$$

где a_B и φ — искомые амплитуда и фаза вынужденных колебаний, $q(a_B) = \frac{4c}{\pi a_B}$ — коэффициент гармонической линеаризации для идеальной релейной характеристики

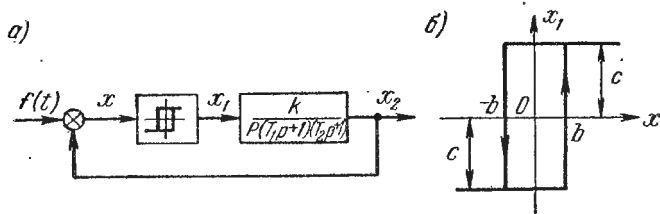


Рис. 290. Структурная схема системы и статическая характеристика нелинейного звена к задаче 424.

(см. приложение 28) при $a = a_B$, а $Q(j\omega_B)$, $R(j\omega_B)$ и $S(j\omega_B)$ определяются из уравнения (3).

Согласно уравнению (3) имеем

$$Q(j\omega_B) = S(j\omega_B) = j\omega_B(1 + T_1 j\omega_B),$$

$$R(j\omega_B) = k. \quad (6)$$

Подставим (6) и значение коэффициента $q(a_B)$ в (5). Получим

$$a_B + \frac{4kce^{-j\tau\omega_B}}{j\omega_B(1 + T_1 j\omega_B)} = B e^{-j\varphi}. \quad (7)$$

После подстановки численных значений параметров и умножения числителя и знаменателя второго слагаемого левой части уравнения (7) на сопряженное выражение имеем

$$a_B - 2,5 - j \cdot 12,3 = 20 e^{-j\varphi}. \quad (8)$$

На комплексной плоскости (рис. 289) строим годограф

$$Z(a_B) = a_B - 2,5 - j \cdot 12,3.$$

и окружность радиуса 20. В точке пересечения по графику $Z(a_B)$ определяем амплитуду вынужденных колебаний $a_B = A_B \approx 18,2$, а по дуге окружности — фазу $\varphi \approx 38^\circ$. Пороговое значение амплитуды входного воздействия $B_{\text{пор}} = 12,3$.

424. Для нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 290, определить амплитуду A_B и фазу φ вынужденных колебаний.

Исходные данные: $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,01 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$, $b = 4$, $c = 10$; амплитуда внешнего синусоидального воздействия $B = 20$, частота внешнего воздействия $\omega_B = 10 \text{ сек}^{-1}$.

Ответ. $A_B \approx 21$, $\varphi \approx 35^\circ$.

§ 15.2. Отыскание симметричных одночастотных вынужденных колебаний частотным методом

425. Для нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 285, определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды и частоты внешнего синусоидального воздействия.

Исходные данные: $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $c = 10$.

Решение. По структурной схеме (рис. 285, а) определяем передаточную функцию гармонически линеаризованной замкнутой нелинейной системы

$$\Phi(p, a) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{л}}(p) W_{\text{н}}(p, a)}; \quad (1)$$

где $X(p)$ и $F(p)$ — изображения по Лапласу ошибки системы $x(t)$ и внешнего синусоидального воздействия $f(t)$, $W_{\text{л}}(p)$ — передаточная функция линейной части системы, $W_{\text{н}}(p, a)$ — передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного звена.

Для рассматриваемой системы имеем

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)}, \quad (2)$$

$$W_{\text{н}}(a) = q(a), \quad (3)$$

где $q(a) = \frac{4c}{\pi a}$ — коэффициент гармонической линеаризации для идеальной релейной статической характеристики (см. приложение 28).

Передаточную функцию (1) запишем в виде

$$\Phi(p, a) = \frac{M_{\text{л}}(p)}{M_{\text{л}}(p) + W_{\text{н}}(a)}, \quad (4)$$

где $M_{\text{л}}(p) = \frac{1}{W_{\text{л}}(p)}$ — обратная передаточная функция линейной части системы.

Найдем обратную частотную передаточную функцию линейной части системы

$$M_{\text{л}}(j\omega) = \frac{j\omega(1 + T_1 j\omega)}{k} = \frac{j\omega(1 + 0,1j\omega)}{10} \quad (5)$$

и передаточную функцию гармонически линеаризованного нелинейного звена

$$W_{\text{н}}(a) = \frac{4c}{\pi a} = \frac{12,7}{a}, \quad (6)$$

а на комплексной плоскости (рис. 291) по формуле (5) построим обратную амплитудно-фазовую характеристику.

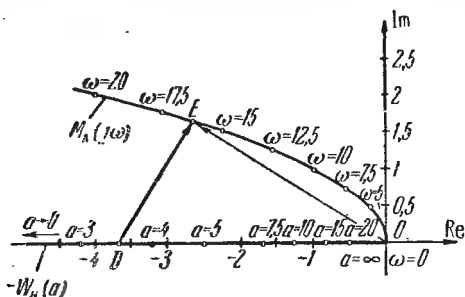


Рис. 291. Обратная амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы и годограф нелинейного звена к задаче 425.

линейной части системы, а по формуле (6) — годограф нелинейного звена $-W_{\text{н}}(a)$.

По отметкам амплитуды на годографе $-W_{\text{н}}(a)$ определяем амплитуду вынужденных колебаний $a_{\text{в}}$ (точка D на рис. 291), а по отметкам частоты на годографе $M_{\text{л}}(j\omega)$ — частоту вынужденных колебаний, равную частоте внешнего синусоидального воздействия (точка E

на рис. 291). Из (4) находим

$$\frac{a_B}{B} = |\Phi(j\omega_B, a_B)| = \frac{|M_L(j\omega_B)|}{|M_L(j\omega_B) + W_H(a_B)|} = \frac{OE}{DE}, \quad (7)$$

где B — амплитуда внешнего синусоидального воздействия.

Выражение (7) определяет связь между амплитудой внешнего воздействия B и амплитудой вынужденных колебаний a_B для любого фиксированного значения частоты ω_B :

$$B = \frac{DE}{OE} a_B. \quad (8)$$

Перемещая точку D на рис. 291 при фиксированном положении точки E находим зависимость $a_B(B)$ при

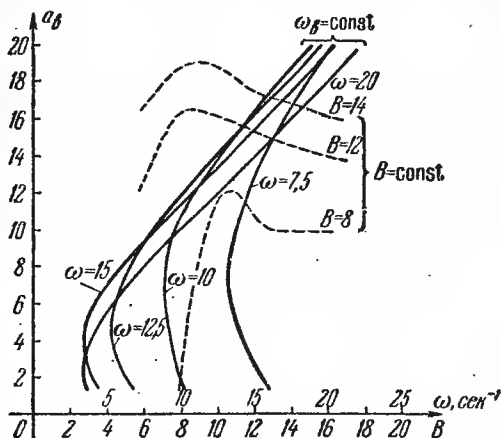


Рис. 292. Зависимости амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды и частоты внешнего воздействия к задаче 425.

$\omega_B = \text{const}$ (рис. 292), а перемещая точку F при фиксированном положении точки D , находим зависимость $a_B(\omega_B)$ при $B = \text{const}$ (пунктирные кривые на рис. 292).

426. Для нелинейной системы, рассмотренной в задаче 425, определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний a_B от амплитуды B и частоты ω_B внешнего синусоидального воздействия, если передаточная

функция линейной части системы

$$W_n(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = T_2 = 0,1 \text{ сек}$.

Ответ. Обратная амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $M_n(j\omega)$ и годограф $-W_n(a)$

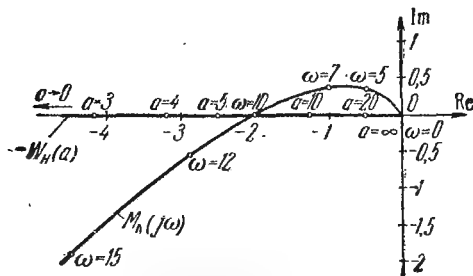


Рис. 293. Обратная амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы и годограф нелинейного звена к задаче 426.

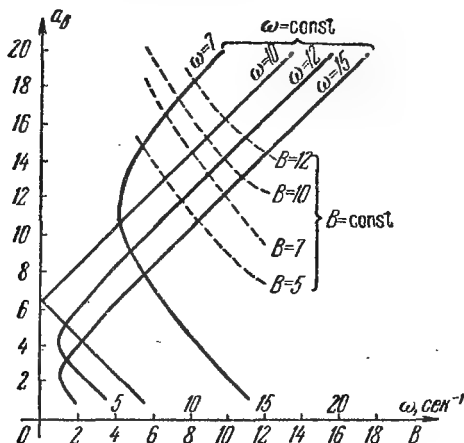


Рис. 294. Зависимости амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды и частоты внешнего воздействия к задаче 426.

изображены на рис. 293. Кривые $\omega_b = \text{const}$ и $B = \text{const}$ показаны на рис. 294. Частота $\omega_b = 10 \text{ сек}^{-1}$, при которой

пороговое значение амплитуды входного синусоидального воздействия $B_{\text{пор}}$ обращается в нуль, равна частоте автоколебаний в системе.

427. Определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний скорости вращения электрического двигателя в нелинейной системе стабилизации, схема которой изображена на рис. 295. На схеме обозначено: $\mathcal{D}$ — двигатель постоянного тока с независимым возбуждением,

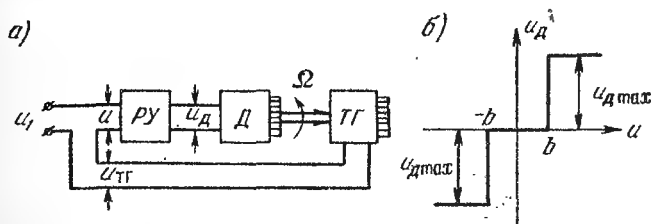


Рис. 295. Система стабилизации скорости вращения электродвигателя к задаче 427.

$\mathcal{TГ}$ — тахогенератор, $\mathcal{PУ}$ — релейный усилитель, статическая характеристика которого изображена на рис. 295, б.

Исходные данные: ширина зоны нечувствительности релейной характеристики $b = 1$ в, установившаяся скорость двигателя при максимальном напряжении на выходе релейного усилителя $u_{\mathcal{D}} = u_{\mathcal{D}\text{max}}$ (рис. 295, б), $\Omega_0 = 625 \text{ сек}^{-1}$, пусковой момент двигателя $M_0 = 100 \text{ Г} \cdot \text{см}$, момент инерции, приведенный к валу двигателя $J = 0,008 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, момент нагрузки на валу двигателя $M_{\text{н}} = 0$, коэффициент передачи тахогенератора $k_{\mathcal{TГ}} = 0,01 \text{ в} \cdot \text{сек}/\text{рад}$. На вход системы подается синусоидальный входной сигнал

$$u_1(t) = B \sin \omega_b t,$$

амплитуда которого $B = 8$ в, а частота $\omega_b = 10 \text{ сек}^{-1}$.

Решение. Обычно при исследовании релейный исполнительный механизм, состоящий из двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и реле, управляющего током якоря, представляется в виде двух

независимых звеньев. Одно из этих звеньев (двигатель) является линейным, а другое (релейный усилитель) — нелинейным. При этом двигатель описывается одним и тем же дифференциальным уравнением независимо от положения контактов реле. В действительности же при разомкнутых контактах реле ($-b < u < b$) цепь якоря двигателя разомкнута, и он превращается в обычный маховик. Если не учитывать момент нагрузки и механические характеристики двигателя считать линейными, то при замкнутых контактах реле ($u > |b|$) движение электродвигателя описывается дифференциальным уравнением

$$J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\beta_0} \Omega = M_0, \quad (1)$$

где Ω — угловая скорость вращения двигателя, $\beta_0 = \frac{\Omega_0}{M_0}$ — коэффициент наклона механической характеристики.

При разомкнутых контактах реле дифференциальное уравнение движения примет вид

$$J \frac{d\Omega}{dt} = 0. \quad (2)$$

Поэтому при исследовании нелинейных систем с релейными исполнительными механизмами двигатель и релейный усилитель следует рассматривать как одно нелинейное звено.

Введем в рассмотренное нормированное значение передаточной функции гармонически линеаризованного релейного исполнительного механизма $W_0(d, jz)$

$$W(d, jz) = \frac{\Omega_0}{b} W_0(d, jz) = \frac{\Omega_0}{b} q_0(d, z) + j \frac{\Omega_0}{b} q'_0(d, z). \quad (3)$$

В этом выражении d — относительная амплитуда

$$d = \frac{u}{b}, \quad (4)$$

z — относительная частота

$$z = \omega T_m, \quad (5)$$

T_m — постоянная времени двигателя, $q_0(d, z)$ и $q'_0(d, z)$ — коэффициенты гармонической линеаризации.

Аналитические выражения для коэффициентов $q_0(d, z)$ и $q'_0(d, z)$ получаются слишком сложными. Поэтому для удобства расчетов в приложении 29 приведены амплитудно-фазовые характеристики нормированной частотной передаточной функции релейного исполнительного механизма.

Для определения параметров вынужденных колебаний системы составим структурную схему (рис. 296) и запишем дифференциальное уравнение замкнутой нелинейной системы

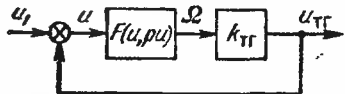


Рис. 296. Структурная схема системы стабилизации скорости вращения электродвигателя к задаче 427.

$$u + k_{TT}F(u, pu) = u_1(t), \quad (6)$$

где

$$F(u, pu) = q(d, z)u + \frac{q'(dz)}{\omega} pu. \quad (7)$$

Составим равенство

$$a_B \frac{Q(j\omega_B) + R(j\omega_B)[q(d_B, z_B) + jq'(d_B, z_B)]}{S(j\omega_B)} = Be^{-j\varphi}, \quad (8)$$

где a_B и φ — искомые амплитуда и фаза вынужденных колебаний, $z_B = \omega_B T_M$.

Связь между амплитудой a_B и относительной амплитудой вынужденных колебаний устанавливается формулой (4)

$$d_B = \frac{a_B}{b} = \frac{u_B}{b}. \quad (9)$$

В данном частном случае согласно уравнению (6) имеем

$$Q(j\omega_B) = S(j\omega_B) = 1, \quad R(j\omega_B) = k_{TT}. \quad (10)$$

Подставим (10) в (8). Получим

$$a_B + k_{TT}a_B[q(d_B, z_B) + jq'(d_B, z_B)] = Be^{-j\varphi}. \quad (11)$$

Коэффициенты $q(d_B, z_B)$ и $q'(d_B, z_B)$ определяем по графикам, приведенным в приложении 29. Для этого предварительно находим

$$z_B = \omega_B T_M = \omega_B J \frac{\Omega_0}{M_0} = 10 \cdot 0,008 \frac{625}{100} = 0,5. \quad (12)$$

Затем задаемся разными значениями амплитуды a_b , для них по формуле (9) определяем значения относительной амплитуды d_b , по амплитудно-фазовым

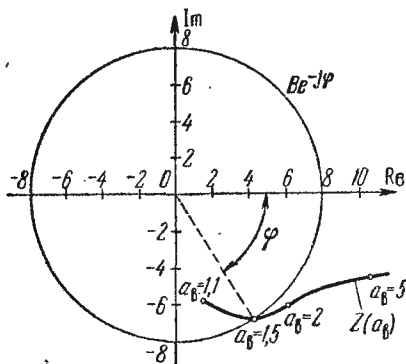


Рис. 297. Графическое построение для определения вынужденных колебаний к задаче 427.

характеристикам (приложение 29) при $z_b = 0,5$ для различных d_b определяем $q_0(d_b, z_b)$ и $q'_0(d_b, z_b)$ и по выражению (3) находим

$$\left. \begin{aligned} q(d_b, z_b) &= \frac{\Omega_0}{b} q_0(d_b, z_b) = 625 q_0(d_b, z_b), \\ q'(d_b, z_b) &= \frac{\Omega_0}{b} q'_0(d_b, z_b) = 625 q'_0(d_b, z_b). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Значения коэффициентов (13) подставляем в (11) и строим кривую

$$Z(a_b) = a_b + k_{\text{тг}} a_b [q(d_b, z_b) + j q'(d_b, z_b)], \quad (14)$$

соответствующую левой части равенства (11) (рис. 297). Проводим окружность радиуса $B = 8$ и в точке пересечения ее с кривой $Z(a_b)$ находим $a_b \approx 1,5$ в, $\varphi \approx 58^\circ$. Амплитуда вынужденных колебаний угловой скорости вращения двигателя равна

$$\Omega_b = \frac{a_b}{k_{\text{тг}}} = \frac{1,5}{0,01} = 150 \text{ сек}^{-1}.$$

ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 16.1. Определение функций и моментов распределения случайного процесса на выходе нелинейной системы

428. На вход безынерционного усилителя, имеющего линейную с ограничением статическую характеристику (рис. 298, а), подается случайный сигнал в виде напряжения u_1 . Плотность распределения этого сигнала описывается функцией

$$w(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u_1 - \bar{u}_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad (1)$$

где $\bar{u}_1$ — среднее значение входного напряжения u_1 , σ_1 — среднеквадратическое отклонение напряжения u_1 от среднего значения $\bar{u}_1$. В линейной зоне статической характеристики коэффициент усиления $k = 10^5$. В зоне насыщения выходное напряжение усилителя $u_{2m} = 100$ в.

Найти и представить в виде графика закон распределения $w(u_2)$ на выходе усилителя при следующих исходных данных: среднее значение $\bar{u}_1 = 0$ в, среднеквадратическое значение $\sigma_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ в.

Решение. Так как усилитель безынерционный, то в линейной зоне $u_2 = ku_1$.

Поскольку $k\sigma_1 = 10^5 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 50$ в, то в этой области $\sigma_2 = k\sigma_1$. Поэтому с учетом того, что $\bar{u}_1 = 0$ в пределах линейности статической характеристики, закон распределения выходного напряжения u_2 имеет вид

$$w(u_2) = w(ku_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}k\sigma_1} e^{-\frac{u_2^2}{(2\sigma_1^2)}}, \quad (2)$$

По условиям нормирования функций распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(u_1) du_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} w(u_2) du_2 = 1. \quad (3)$$

Подставляя в последнее выражение функцию (2), найдем

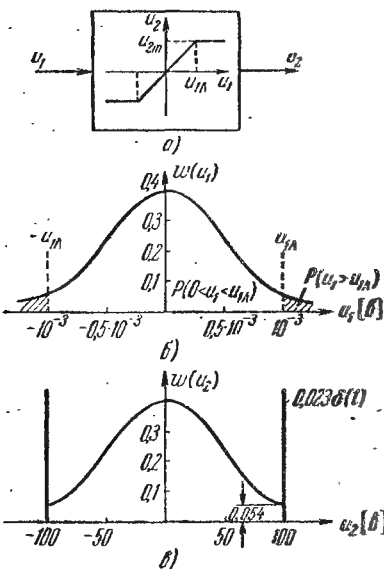


Рис. 298. Преобразования функций распределения случайного сигнала линейным звеном с насыщением при $u = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_1^2}{2\sigma_1^2}} \frac{du_1}{\sigma_1} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_2^2}{\sigma_2^2}} \frac{du_2}{\sigma_2} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, в линейной зоне нормированные плотности распределения для относительных переменных $z_1 = \frac{u_1}{\sigma_1}$ и $z_2 = \frac{u_2}{\sigma_2}$ на входе и выходе одинаковы (рис. 298, б, в).

Протяженность линейной зоны статической характеристики усилителя по оси u_1 (рис. 298, а) может быть определена из соотношения

$$u_{1л} = \frac{u_{2м}}{k} = \frac{100}{10^5} = 10^{-3} \text{ в.}$$

Следовательно, ее относительная величина

$$z_1 = \frac{u_{1л}}{\sigma_1} = \frac{10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 2.$$

Вероятность $P(u_2 > 100 \text{ в})$ появления сигнала $u_2 > 100 \text{ в}$ на выходе усилителя равна нулю, так как более чем 100 в усилитель дать не может согласно статической характеристике.

Вероятность же $P(u_2 = 100 \text{ в})$ появления сигнала $u_2 = 100 \text{ в}$, очевидно, равна вероятности $P(u_1 \geq u_{1л} = 10^{-3} \text{ в})$. Поэтому можно записать

$$P(u_2 = 100 \text{ в}) = P(u_1 \geq u_{1л}) = P(z_1 \geq z_{1л}) = \\ = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_{1л}} e^{-\frac{z_1^2}{2}} dz_1.$$

При $z_{1л} = 2$ согласно приложению 31 написанный интеграл равен 0,477. Поэтому $P(u_2 = 100 \text{ в}) = 0,5 - 0,477 = 0,023$.

Таким образом, в пределах линейности усилителя функции $w(u_2)$ имеет такое же нормированное распределение, как и $w(u_1)$. На концах интервала линейности $w(u_2 = 100 \text{ в})$ имеет вид дельта-функций с площадью, равной 0,023 (рис. 298, б и в).

429. Для усилителя предыдущей задачи найти функции $w(u_2)$ распределения выходного напряжения, если на его вход подается напряжение u_1 , имеющее случайную величину, распределенную по нормальному закону

$$w(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{(u_1 - \bar{u}_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad (1)$$

при $\bar{u}_1 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ в}$, $\sigma_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ в}$.

Решение. Так же, как и в предыдущем случае, в линейной области статической характеристики, ограниченной диапазоном $-u_{1л} < u_1 < u_{1л}$, нормированные законы распределения $w(z_1)$ и $w(z_2)$ одинаковы. При этом относительные величины z_1 и z_2 удобно ввести в виде

$$z_1 = \frac{u_1 - \bar{u}_1}{\sigma_1}, \quad (2)$$

$$z_2 = \frac{u_2 - \bar{u}_2}{\sigma_2} = \frac{u_2 - \bar{u}_2}{k\sigma_1}. \quad (3)$$

Вероятности появления сигналов $|u_2| > 100 \text{ в}$ равны нулю. Вероятности же сигналов $u_2 = \pm 100 \text{ в}$ могут быть

определены по формулам

$$P(u_2 = 100 \text{ в}) = P(u_1 > u_{1л}) = P(z_1 > z'_{1л}) =$$

$$= 0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z'_{1л}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (4)$$

$$P(u_2 = -100 \text{ в}) = P(u_1 < -u_{1л}) = P(z_1 < -z''_{1л}) =$$

$$= 0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z''_{1л}}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (5)$$

Подставив в (2) значения $\bar{u}_1$, $u_{1л}$ и $-u_{1л}$, найдем

$$z'_{1л} = \frac{u_{1л} - \bar{u}_1}{\sigma_1} = \frac{1 \cdot 10^{-3} - 0,75 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 0,5,$$

$$z''_{1л} = \frac{-u_{1л} - \bar{u}_1}{\sigma_1} = \frac{(-1 - 0,75) \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = -2,5.$$

Воспользовавшись приложением 31 для модулей $|z'_{1л}|$

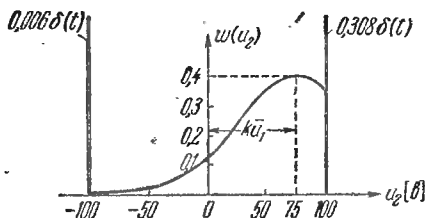


Рис. 299. Функция распределения сигнала на выходе линейного звена с насыщением при $\bar{u} \neq 0$.

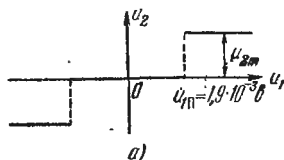
и $|z''_{1л}|$, получим следующие значения вероятностей:

$$P(u_2 = 100 \text{ в}) = 0,5 - 0,192 = 0,308,$$

$$P(u_2 = -100 \text{ в}) = 0,5 - 0,494 = 0,006.$$

Таким образом, на концах интервала линейности функция $w(u_2)$ имеет вид дельта-функций с площадями, соответственно равными 0,308 и 0,006 (рис. 299).

430. Найти функцию распределения $w(u_2)$ выходного напряжения u_2 безынерционного усилителя с релейной статической характеристикой, изображенной на рис. 300, а, если на вход его подается напряжение u_1 , случайная величина которого распределена так же, как и в задаче 429. Задачу решить для двух случаев:



1)

$$\bar{u}_1 = 0 \text{ в}, \quad \sigma_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ в};$$

2)

$$\bar{u}_1 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ в},$$

$$\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ в}.$$

Срабатывание релейного усилителя происходит при напряжении $u_{1н} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ в}$. Выходное напряжение $u_{2м} = 100 \text{ в}$.

Ответ. В том и другом случае функция $w(u_2)$ представляет собой дельта-функции при значениях $u_2 = 0$ и $u_2 = \pm 100 \text{ в}$ (рис. 300, б). Площади этих дельта-функций, равные вероятностям появления соответствующего выходного сигнала u_2 , имеют следующие величины:

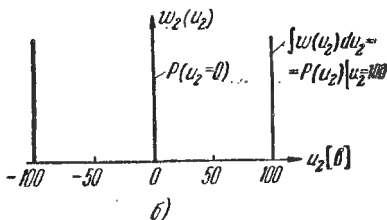


Рис. 300. Функция распределения (б) сигнала на выходе элемента с идеальной релейной характеристикой (а).

$$1) \quad p(u_2) = \begin{cases} 0,658 & \text{при } u_2 = 0, \\ 0,171 & \text{при } u_2 = \pm 100 \text{ в}, \\ 0 & \text{при прочих } u_2; \end{cases}$$

$$2) \quad p(u_2) = \begin{cases} 0,5019 & \text{при } u_2 = 0, \\ 0,498 & \text{при } u_2 = +100 \text{ в}, \\ 0,0001 & \text{при } u_2 = -100 \text{ в}, \\ 0 & \text{при прочих } u_2. \end{cases}$$

431. Найти математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционную функцию $R_y(t_1, t_2)$ выходной величины $y(t)$

нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 301.

Уравнения, описывающие динамику работы системы, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (Tp + 1)y &= F(x), \\ x &= g - y, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где нелинейная зависимость $F(x)$ описывается функцией

$$F(x) = k_1x + k_2x^3. \quad (2)$$

Входной сигнал $g(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим

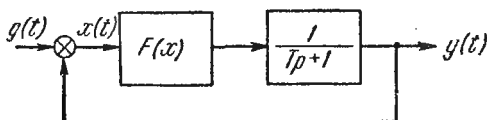


Рис. 301. Структурная схема нелинейной системы.

ожиданием ($m_g = 0$) и корреляционной функцией

$$R_g(t_1, t_2) = \sigma_g^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)}. \quad (3)$$

Моменты более высоких порядков во входном сигнале отсутствуют. Постоянные, входящие в уравнения (1)–(3), имеют следующие значения: $T = 0,125$ сек, $k_1 = 8$, $k_2 = 0,4$, $\sigma_g = 6$, $\alpha = 10$ сек⁻¹.

Решение. Поскольку нелинейная зависимость (2) непрерывна и дифференцируема, то для определения моментов выходной величины $y(t)$ можно воспользоваться ее разложением по моментам входной величины $g(t)$. Поэтому решение для $y(t)$ будем искать в виде степенного функционального ряда

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) g^n(t). \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в (1) и (2) и приравнявая члены с одинаковой степенью g , получим линейные дифференциальные уравнения для последовательного

нахождения необходимых функций φ_{2l+1} ($l = 0, 1, 2, \dots$)

$$(Tp + 1)\varphi_{2l+1} = c_{2l+1} \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Значения членов c_{2l+1} , входящих в эти уравнения, для $l = 0$ и $l = 1$ имеют вид: $c_1 = k_1$,

$$c_3 = k_2(1 + 3\varphi_1 - 3\varphi_1^2 - \varphi_1^3). \quad (6)$$

При заданном виде нелинейности $F(g, y)$ и моментов распределения входного случайного сигнала $g(t)$ все функции φ_{2l+1} ($l = 1, 2, \dots$) с четными номерами равны нулю.

Определив в результате решения системы уравнений (5) функции $\varphi_{2l+1}(t)$, можно найти интересующие нас моменты распределения выходного сигнала $y(t)$ через моменты входного сигнала $g(t)$. Для этого необходимо воспользоваться разложением $y(t)$ в ряд (4) по степеням $g(t)$.

В частности, моменты первого и второго порядков определяются согласно выражениям

$$m_y = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{2l+1}(t) m_{g_{2l+1}}(t), \quad (7)$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \sum_{n, l=0}^{\infty} \varphi_{2l+1}(t_1) \varphi_{2n+1}(t_2) M[g^{2l+1}(t_1), g^{2n+1}(t_2)], \quad (8)$$

где $M[g^{2l+1}(t_1), g^{2n+1}(t_2)]$ — соответствующий смешанный момент распределения входной величины.

Так как по условию задачи задана только корреляционная функция входного сигнала (момент второго порядка)

$$R_g(t_1, t_2) = M[g(t_1), g(t_2)],$$

то для решения задачи достаточно определить лишь функцию $\varphi_1(t)$. Для этого согласно (5) и (6) необходимо решить уравнение

$$(Tp + 1)\varphi_1 = k_1.$$

Решение его дает

$$\varphi_1(t) = k_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

С учетом характера входного сигнала получаем

$$m_y = \varphi_1(t) m_g(t),$$

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \varphi_1(t_1) \varphi_1(t_2) R_g(t_1, t_2) = \\ &= k_1^2 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}\right) \left(1 - e^{-\frac{t_2}{T}}\right) \sigma_g^2 e^{-\alpha(t_2-t_1)} = \\ &= k_1^2 \sigma_g^2 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2}{T}} + e^{-\frac{(t_2-t_1)}{T}}\right) e^{-\alpha(t_2-t_1)}. \end{aligned}$$

Обозначим $\tau = t_2 - t_1$. Тогда

$$R_y(t_1, t_2) = R_y(t_1, \tau) = k_1^2 \sigma_g^2 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}\right) \left(1 - e^{-\frac{\tau+t_1}{T}}\right) e^{-\alpha\tau}.$$

Подставляя значения всех входящих величин, окончательно найдем

$$m_y = 0,$$

$$R_y(t_1, \tau) = 2304 (1 - e^{-8t_1}) (1 - e^{-8(\tau+t_1)}) e^{-10\tau}.$$

Таким образом, корреляционная функция выходного сигнала $y(t)$ зависит не только от интервала τ , но и от начала отсчета t_1 по оси времени.

§ 16.2. Расчет нелинейных систем с помощью статистической линеаризации

432. Методом статистической линеаризации найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию на выходе нелинейного безынерционного усилителя, если на вход его поступает случайный сигнал $u_1(t)$, имеющий статистические характеристики

$$\begin{aligned} m_{u_1}(t) &= m_{u_1}, \\ R_{u_1}(t_1, t_2) &= \sigma_{u_1}^2 e^{-\alpha\tau}, \\ (\tau &= t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Статическая характеристика усилителя представлена на рис. 302. Необходимые для расчета величины имеют следующие числовые значения: $m_{u_1} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ в, $\sigma_{u_1} = 2 \cdot 10^{-3}$ в, $|u_{1n}| = 1 \cdot 10^{-3}$ в, $u_{2m} = 100$ в, $\alpha = 2$ сек $^{-1}$.

Решение. Согласно методу статистической линеаризации для безынерционного нелинейного звена искомые статистические характеристики выходного напряжения определяются с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} m_{u_2} &= k_0(m_{u_1}, \sigma_{u_1}) m_{u_1}, \\ \sigma_{u_2} &= k_1(m_{u_1}, \sigma_{u_1}) \sigma_{u_1}, \\ R_{u_2}(t_1, t_2) &= k_1'^2(m_{u_1}, \sigma_{u_1}) R_{u_1}(t_1, t_2), \\ R_{u_1, u_2}(t_1, t_2) &= k_1''(m_{u_1}, \sigma_{u_1}) \sigma_{u_1}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где k_0 , k_1' , k_1'' — коэффициенты статистической линеаризации,

$$k_1 = \frac{1}{2}(k_1' + k_1''). \quad (2)$$

Для того чтобы воспользоваться коэффициентами статистической линеаризации, приведенными в приложении 30, обозначим

$$u_{1л} = b, \quad u_{2м} = c.$$

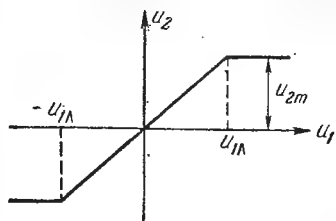


Рис. 302. Статическая характеристика линейного звена с насыщением.

В соответствии с заданными числовыми значениями

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_{u_1}}{u_{1л}} = 1,6, & \sigma_1 &= \frac{\sigma_{u_1}}{u_{1л}} = 2, \\ \frac{c}{m_{u_1}} &= \frac{100}{1,6 \cdot 10^{-3}} = 6,25 \cdot 10^4, & \frac{c}{\sigma_{u_1}} &= \frac{100}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в формулы (П.33) ÷ (П.35) приложения 30, получим

$$\begin{aligned} k_0 &\approx 6,25 \cdot 10^4 \cdot 0,6 = 3,65 \cdot 10^4, \\ k_1' &= 5 \cdot 10^4 \cdot 0,72 = 3,6 \cdot 10^4, \\ k_1'' &= 5 \cdot 10^4 \cdot 0,76 = 3,8 \cdot 10^4, & k_1 &= 3,7 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

С учетом этих значений

$$m_{u_2} = 58,4\text{в},$$

$$\sigma_{u_2} = 74\text{в},$$

$$R_{u_2}(t_1, t_2) = 5328e^{-2\tau\theta^2},$$

$$R_{u_1, u_2}(t_1, t_2) = 0,152\theta^2.$$

433. На вход безынерционного электронного трехпозиционного реле подается напряжение

$$u_1 = u_{10} + u_{1\text{сл}},$$

где $u_{10} = 4 \cdot 10^{-3}\text{в}$ — постоянная составляющая, $u_{1\text{сл}}$ — стационарная случайная составляющая со спектральной плотностью

$$S_{u_1}(\omega) = \frac{2\alpha D_{u_1}}{\alpha^2 + \omega^2},$$

$$D_{u_1} = \sigma_{u_1}^2 = 25 \cdot 10^{-6}\text{в}^2, \quad \alpha = 2 \text{ сек}^{-1}.$$

Напряжение срабатывания и отпускания электронного реле $u_{1\text{ср}} = \pm 2 \cdot 10^{-3}\text{в}$. Выходное напряжение реле $u_2 = \pm 10\text{в}$.

Применяя метод статистической линеаризации, найти постоянную составляющую выходного напряжения u_{20} , его автокорреляционную функцию $R_{u_2}(t_1, t_2)$ и взаимную корреляционную функцию $R_{u_1, u_2}(t_1, t_2)$.

Ответ.

$$u_{20} = 5,4\text{в},$$

$$R_{u_2}(t_1, t_2) = 47,7e^{-2\tau\theta^2},$$

$$R_{u_1, u_2}(t_1, t_2) = 2,87 \cdot 10^{-2}\theta^2.$$

434. Найти математическое ожидание m_Ω и дисперсию σ_Ω^2 скорости вращения оси двигателя системы, состоящей из безынерционного линейного усилителя, двигателя и тахогенератора с ограниченной линейной характеристикой. Структурная схема системы представлена на рис. 303. На вход системы подается напряжение $u_1(t)$, представляющее собой сумму постоянного напря-

жения u_{10} и стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием ($m_{u_1} = 0$) и корреляционной функцией

$$R_{u_1}(\tau) = \sigma_{u_1}^2 e^{-\alpha \tau} \quad (\alpha = 12,5 \text{ сек}^{-1}).$$

Коэффициент усиления усилителя по напряжению $k_y = 600$.

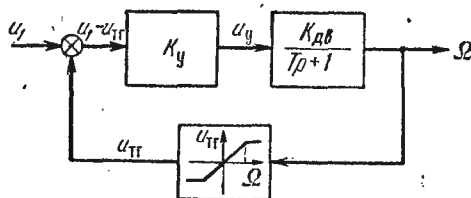


Рис. 303. Структурная схема следящей системы с нелинейной обратной связью.

При напряжении $u_1 = 30$ в вал двигателя вращается со скоростью $n = 3000$ об/мин, а тахогенератор развивает напряжение $u_{тг} = 0,1$ в. Электромеханическая постоянная времени двигателя $T = 0,04$ сек. Статическая характеристика тахогенератора имеет вид, представленный на рис. 302. Линейная зона характеристики ограничивается скоростью вращения вала двигателя 3000 об/мин.

Задачу решить для трех значений дисперсии входного напряжения: $\sigma_{u_1}^2 = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ в}^2, 25 \cdot 10^{-4} \text{ в}^2, 100 \cdot 10^{-4} \text{ в}^2$ при $u_{10} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ в}$.

Решение. Передаточная функция линейной части системы

$$W(p) = \frac{k_y k_{дв}}{Tp + 1} = \frac{k}{Tp + 1} = \frac{k}{C(p)}, \quad (1)$$

где $C(p) = Tp + 1$.

Коэффициент передачи двигателя в соответствии с заданными условиями задачи имеет значение

$$k_{дв} = \frac{n_m \cdot 2\pi}{u_{ym} \cdot 60} = \frac{3000 \cdot 6,28}{30 \cdot 60} = 10,5 \text{ (в} \cdot \text{сек)}^{-1}.$$

Следовательно, $k = 6 \cdot 10^2 \cdot 10,5 = 6,3 \cdot 10^3 \text{ (в} \cdot \text{сек)}^{-1}$.

При измерении скорости вращения Ω вала двигателя в рад/сек зона линейности статической характеристики тахогенератора равна

$$b = \Omega_{\text{л}} = \frac{n_{\text{л}} \cdot 2\pi}{60} = 314 \text{ сек}^{-1}.$$

При этом тахогенератор развивает напряжение $u_{\text{тгм}} = 0,1 \text{ в}$.

Можно предполагать, что при заданном виде передаточной функции и нелинейности автоколебания в системе отсутствуют. Поэтому для решения поставленной задачи можно применить метод расчета неколебательных стационарных систем с одной нелинейностью с использованием статистической линеаризации.

Согласно приложению 30 для заданной нелинейности коэффициенты статистической линеаризации вычисляются с помощью следующих формул:

$$k_0 = \frac{u_{\text{тгм}}}{m_{\Omega}} \left\{ (1 + m_1) \Phi \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - (1 - m_1) \Phi \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}, \quad (2)$$

$$k'_1 = \frac{u_{\text{тг}}}{\sigma_{\Omega}} \left\{ 1 - \frac{k_0^2 m_{\Omega}^2}{u_{\text{тгм}}^2} + (m_1^2 + \sigma_1^2 - 1) \left[\Phi \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_1 (1 - m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - \frac{\sigma_1 (1 + m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

$$K''_1 = \frac{u_{\text{тгм}}}{\sigma_{\Omega}} \sigma_1 \left[\Phi \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right], \quad (4)$$

где $m_1 = \frac{m_{\Omega}}{b}$, $\sigma_1 = \frac{\sigma_{\Omega}}{b}$.

Для расчета примем

$$k_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega}) = \frac{1}{2} (k'_1 + k''_1).$$

Для вычисления этих статистических коэффициентов передачи нужно знать m_{Ω} и σ_{Ω} на выходе двигателя, которые неизвестны. Поэтому необходимо еще воспользоваться формулами для расчета этих величин.

Применительно к рассматриваемой схеме можно написать

$$m_{\Omega} = \frac{k(m_{u_1} + u_{10})}{C(0) + kk_0(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{k}{C(j\omega) + kk_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})} \right|^2 S_{u_1}(\omega) d\omega, \quad (6)$$

где

$$C(0) = C(p)_{p=0},$$

$$C(j\omega) = C(p)_{p=j\omega}.$$

Подставляя значения m_{u_1} , u_{10} , $C(p)$, найдем

$$m_{\Omega} = \frac{ku_{10}}{1 + kk_0(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{T^2\omega^2 + [1 + kk_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})]^2} \cdot \frac{\sigma_{u_1}^2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega. \quad (8)$$

При написании σ_{Ω}^2 здесь учтено, что заданной корреляционной функции входного сигнала $R_{u_1}(\tau)$ соответствует спектральная плотность

$$S_{u_1}(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_{u_1}^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Пользуясь приложением 17, находим значение интеграла (8):

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{k^2\sigma_{u_1}^2}{[1 + kk_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})][1 + kk_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega}) + \alpha T]}. \quad (9)$$

Таким образом, для того чтобы найти значения σ_{Ω} и m_{Ω} , необходимо решить систему уравнений (7), (8), используя также уравнения (2) ÷ (4).

Подставим в уравнения (7) и (9) числовые значения заданных величин

$$m_{\Omega} = \frac{315}{1 + 6,3 \cdot 10^3 k_0(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})}, \quad (10)$$

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot \sigma_{u_1}^2}{[1 + 6,3 \cdot 10^3 k_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega})][1 + 6,3 \cdot 10^3 k_1(m_{\Omega}, \sigma_{\Omega}) + 0,5]}. \quad (11)$$

Решение задачи для всех заданных σ_m будем вести методом последовательных приближений

$$1. \sigma_{u_1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ в.}$$

В качестве первого приближения возьмем значения коэффициентов k_0 и k_1 , равные коэффициенту передачи тахогенератора в линейной зоне:

$$k_0^{(1)} = k_1^{(1)} = \frac{u_{ггм}}{b} = \frac{0,1}{314} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек.}$$

Подставляя эти значения, а также σ_{u_1} , в (10) и (11), получим первое приближение:

$$m_{\Omega}^{(1)} = 105 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_{\Omega}^{(1)} = 48,9 \text{ сек}^{-1}.$$

Вычислим теперь значения m_1 и σ_1 для следующего приближения:

$$m_1 = \frac{m_{\Omega}}{b} = \frac{105}{315} = 0,333, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_{\Omega}}{b} = \frac{48,9}{315} = 0,156.$$

Используя формулы (2)–(4), найдем второе приближение:

$$k_0^{(2)} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек.},$$

$$k^{(2)} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек.}$$

Таким образом, второе приближение совпало с первым. Следовательно, при

$$\sigma_{u_1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ в} \text{ и } u_{10} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ в}$$

$$m_{\Omega} = 105 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_{\Omega} = 48,9 \text{ сек}^{-1}$$

или

$$m_n = 1000 \text{ об/мин}, \quad \sigma_n = 566 \text{ об/мин.}$$

$$2. \sigma_{u_1} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ в}, \quad u_{10} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ в.}$$

В качестве первого приближения берем прежние значения:

$$k_0^{(1)} = k_1^{(1)} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек.}$$

В результате расчета по формулам (10) и (11) получаем

$$m_{\Omega}^{(1)} = 105 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_{\Omega}^{(1)} = 97,8 \text{ сек}^{-1}.$$

Это соответствует

$$m_1^{(1)} = 0,333, \quad \sigma_1^{(1)} = 0,312.$$

Вычисление по формулам (2)–(4) дает

$$k_0^{(2)} = 3,15 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad k_1'^{(2)} = 0,94 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \\ k_1''^{(3)} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad k_1^{(2)} = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}.$$

Далее в результате расчета находим

$$m_\Omega^{(2)} = 106 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_\Omega^{(2)} = 125,4 \text{ сек}^{-1}.$$

Расчет по аналогичной методике дает третье приближение:

$$k_0^{(3)} = 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad k_1'^{(3)} = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \\ k_1''^{(3)} = 3,05 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad k_1^{(3)} = 2,11 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \\ m_\Omega^{(3)} = 106 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_\Omega^{(3)} = 124,8 \text{ сек}^{-1}.$$

Этот результат можно считать окончательным, так как он мало отличается от второго приближения.

$$3. \sigma_{u_1} = 0,1 \text{ в}, \quad u_{10} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ в}.$$

Первое приближение:

$$k_0^{(1)} = k_1^{(1)} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad m_\Omega^{(1)} = 105 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_\Omega^{(1)} = 195 \text{ сек}^{-1}, \\ m_1^{(1)} = 0,333, \quad \sigma_1^{(1)} = 0,62.$$

Второе приближение:

$$k_0^{(2)} = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad k_1^{(2)} = 1,96 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \\ m_\Omega^{(2)} = 123 \text{ сек}^{-1}, \\ \sigma_\Omega^{(2)} = 234 \text{ сек}^{-1}, \quad m_1^{(2)} = 0,39, \quad \sigma_1^{(1)} = 0,744.$$

Третье приближение

$$k_0^{(3)} = 2,54 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \quad k_1^{(3)} = 1,97 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}, \\ m_\Omega^{(3)} = 123,4 \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_\Omega^{(3)} = 233,9 \text{ сек}^{-1}.$$

Это приближение можно считать окончательным, так как оно практически не отличается от второго.

435. Найти дисперсию $\sigma_{\theta_y}^2$ угла поворота рамы 1 вокруг оси y простейшей гировертикали с маятниковой коррекцией (рис. 304), если маятник 2 поворачивается вокруг этой же оси на угол

$$\theta_y = m_{\theta_y} + \theta_{сл\ y},$$

где $m_{\theta_y} = \text{const}$ — математическое ожидание, $\theta_{сл\ y}$ — случайная центрированная составляющая с корреляционной функцией

$$R_{\theta_y}(\tau) = \sigma_{\theta_y}^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Маятниковый корректор с усилителем 3 и датчиком момента 4 имеет нелинейную статическую характеристику, представленную на рис. 305. Максимальный

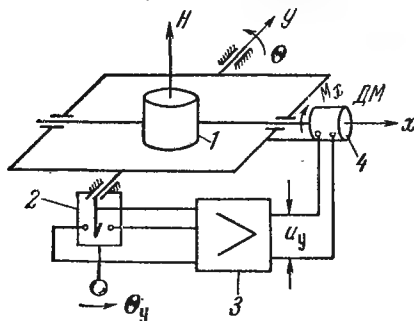


Рис. 304. Гировертикаль с маятниковой коррекцией.

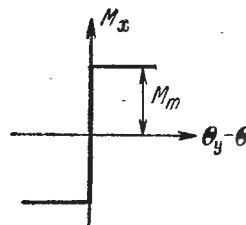


Рис. 305. Статическая характеристика маятникового корректора.

момент коррекции $M_m = 17,5 \text{ Г} \cdot \text{см}$. Кинетический момент гироскопа $H = 20\,000 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$.

Задачу решить для следующих значений дисперсии $\sigma_{\theta_y} = 10, 20, 30$ и $40 \text{ угл} \cdot \text{мин}$, $m_{\theta_y} = 0$, $\alpha = 0,8 \text{ сек}^{-1}$.

Указание. Поскольку структурная схема системы имеет вид, изображенный на рис. 306, сначала необходимо найти математическое ожидание и дисперсию ошибки ϑ на входе нелинейного элемента. Для этого

используются формулы

$$m_{\theta} = \frac{C(0) [m_{\theta y}]}{C(0) + k k_0 (m_{\theta}, \sigma_{\theta})}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{C(j\omega)}{C(j\omega) + k k_1 (m_{\theta}, \sigma_{\theta})} \right|^2 S_{\theta y}(\omega) d\omega, \quad (2)$$

где $C(0) = C(p)_{p=0}$ — многочлен знаменателя передаточной функции линейной части (в рассматриваемом случае $C(p) = p$), $C(j\omega) = C(p)_{p=j\omega}$, $S_{\theta y}(\omega)$ — спектральная

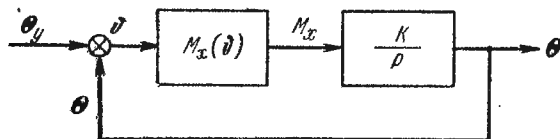


Рис. 306. Структурная схема гировертикали с нелинейной маятниковой коррекцией.

плотность, соответствующая заданной корреляционной функции $R_{\theta y}(\tau)$, k_0 и k_1 — коэффициенты статистической линеаризации нелинейности (см. рис. 305), которые определяются методом последовательных приближений при решении уравнений (1) и (2) совместно с формулами приложения 30.

После нахождения k_0 и k_1 математическое ожидание m_{θ} и дисперсия σ_{θ}^2 определяются по формулам

$$m_{\theta} = \frac{k k_0 m_{\theta y}}{C(0) + k k_0},$$

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{k k_1}{C(j\omega) + k_1 k} \right|^2 S_{\theta y}(\omega) d\omega.$$

Ответ.

$\sigma_{\theta y}^2 (\text{угл. мин})^2$	100	400	900	1600
$\sigma_{\theta}^2 (\text{угл. мин})^2$	94	304	567	849

ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЦИФРОВЫЕ, САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

ГЛАВА 17

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

§ 17.1. Синтез оптимальных систем с использованием принципа максимума

436. Произвести синтез регулятора, обеспечивающего оптимальное по быстродействию управление движением спутника вокруг центра масс по одной из осей. Функциональная схема системы управления представлена на рис. 307.



Рис. 307. Функциональная схема системы управления угловым положением спутника.

Момент инерции спутника $J = 200 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2$. Исполнительными органами системы управления являются газовые реактивные двигатели с регулируемой тягой, развивающие максимальный момент $M_m = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}$. При оптимальном управлении найти время, необходимое для прихода спутника в установившееся нулевое состояние, если в начальный момент его отклонение составляло $1^\circ 46'$, а угловая скорость $28,65 \text{ град/сек}$. Возмущения отсутствуют. Задачу решить, используя принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Решение. Уравнения движения спутника при отсутствии возмущений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= M, \\ M &= M(\vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

По условию задачи момент M должен быть сформирован так, чтобы спутник переходил из любого отклоненного положения в нормально ориентированное за минимальное время.

Поскольку тяга реактивных исполнительных двигателей конечна, то управляющий момент M ограничен

$$M \leq M_{\max} = M_m.$$

Для решения задачи преобразуем уравнение (1). Для этого обозначим $x_1 = \vartheta$, $x_2 = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}$, $k = \frac{M_m}{J}$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = k\mu, \quad (2)$$

где μ — нормированная функция управления, модуль которой $|\mu| \leq 1$. Сформируем функцию [2,20]

$$H = \sum_{i=1}^2 \psi_i f_i(x_1, x_2, \mu). \quad (3)$$

Для системы (2)

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 k \mu. \quad (4)$$

Максимум этой функции с учетом ограничения (2) на управляющий сигнал μ и обеспечивает оптимальность системы по быстродействию. Очевидно, что при наложенных ограничениях максимум H имеет место, если управляющий сигнал μ формируется согласно закону [20]

$$\mu = \text{sign } \psi_2. \quad (5)$$

Таким образом, оптимальное по быстродействию управление будет осуществляться в том случае, если регулятор будет переключать исполнительное устройство по релейному закону в соответствии со знаком вспомогательной функции ψ_2 . Для того чтобы найти ψ_2 ,

запишем [20]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2 + c_1 t,$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Чтобы наглядно представить, как происходит переключение, изобразим процесс движения на фазовой плоскости.

Исключим из уравнений (2) dt . При этом для $\mu = \pm 1$ получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 dx_2 &= \pm k dx_1, \\ \frac{x_2^2}{2} &= \pm k x_1 + c. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Уравнениям (7) соответствуют параболы, симметричные относительно оси x_1 (рис. 308, а). Спутник придет и бу-

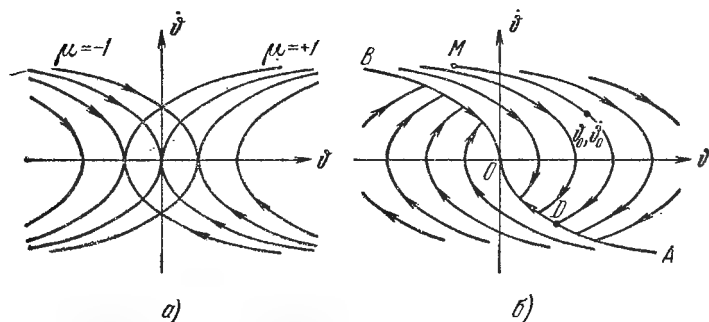


Рис. 308. Фазовые диаграммы углового движения спутника при $\mu \pm 1$ (а) и при оптимальном управлении (б).

дет оставаться в исходном положении, если изображающая точка на фазовой плоскости попадет в начало координат ($x_1 = \vartheta \equiv 0, x_2 = \frac{d\vartheta}{dt} \equiv 0$). Для этого при произвольном начальном отклонении $\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0$ изображающая точка $\bar{M}$

должна перейти сначала в точку D (рис. 308, б), а затем уже по линии переключения AO — в начальную точку. Переход на траекторию AO достигается изменением знака управляющей функции μ с « -1 » на « $+1$ ».

Таким образом, управляющий сигнал μ должен менять знак при выходе изображающей точки на линию переключения. В соответствии с рис. 308, б

$$\mu(\vartheta) = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{d\vartheta}{dt} < \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n \text{ и при } \frac{d\vartheta}{dt} = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n < 0, \\ -1 & \text{при } \frac{d\vartheta}{dt} > \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n \text{ и при } \frac{d\vartheta}{dt} = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение линии переключения находится из выражения (7) и рис. 308, б

$$\dot{\vartheta}_n = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n = -\sqrt{2k\vartheta} \operatorname{sign} \vartheta. \quad (9)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\dot{\vartheta}_n = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n = -0,2\sqrt{\vartheta} \operatorname{sign} \vartheta. \quad (10)$$

Следовательно, в регуляторе должно быть устройство, дифференцирующее ошибку ϑ по времени и вычисляющее скорость $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_n$ на линии переключения по формуле (10), а также логическое устройство, осуществляющее переключение реактивных двигателей на полную

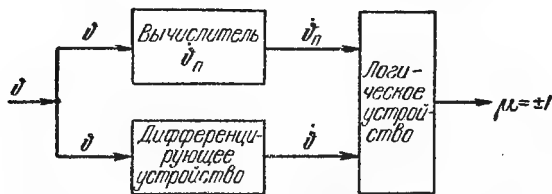


Рис. 309. Функциональная схема оптимального регулятора.

тягу по закону, выраженному формулами (8). Функциональная схема регулятора представлена на рис. 309.

Оптимальное время перехода спутника из заданного положения в нулевое может быть определено следующим образом. Из уравнения (2) можно написать

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} = k\mu.$$

Поэтому $d\dot{\vartheta} = k\mu dt$. В результате интегрирования получаем

$$\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1 = k\mu(t_2 - t_1). \quad (11)$$

Поскольку переход совершается в два этапа и значения $\dot{\vartheta}$ в начале ($\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = 28,65$ град/сек) и в конце ($\dot{\vartheta}_2 = 0$) заданы, то для вычисления времени на каждом этапе согласно выражению (11) необходимо найти $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_1$ в точке D . Эта точка лежит на пересечении кривых, описываемых уравнениями

$$\vartheta = -\frac{1}{k} \frac{(\dot{\vartheta})^2}{2} + c_0 \quad \text{и} \quad \vartheta = \frac{1}{k} \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}. \quad (12)$$

Поэтому

$$\dot{\vartheta}_1 = \pm \sqrt{c_0 k}. \quad (13)$$

c_0 определим из начальных условий. Для этого предварительно преобразуем ϑ_0 и $\dot{\vartheta}_0$ в радианную меру

$$\vartheta_0 = 1^\circ 46' = 0,02 \text{ рад}, \quad \dot{\vartheta}_0 = 28,65 \text{ град/сек} = 0,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Тогда для начальных условий имеем

$$c_0 = (0,02)^2 + \frac{(0,5)^2}{2} = 0,129 \text{ рад}.$$

Подстановка c_0 и k в (13) дает

$$\dot{\vartheta}_1 = \sqrt{0,129} = 0,345 \text{ сек}^{-1}.$$

Для расчета необходимо взять знак $(-)$, так как переключение происходит в области отрицательных значений $\dot{\vartheta}$. Подставляя $\dot{\vartheta}_1$ в (11), находим время движения на первом ($\Delta t_1 = t_1 - t_0$) и втором ($\Delta t_2 = t_2 - t_1$) участках

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2}{k} = \frac{0,845}{0,02} = 42,3 \text{ сек},$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1}{k} = \frac{0,345}{0,02} = 17,3 \text{ сек}.$$

Общее время $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 59,6 \text{ сек}.$

437. Спутник, рассмотренный в задаче 436, подвешен на торсионной подвеске в вакуумной испытательной камере. Жесткость торсиона равна $2 \text{ кг} \cdot \text{м/рад}$. Силы сопротивления, пропорциональные скорости вращения $\dot{\vartheta}$, отсутствуют. Спутник сбалансирован и поэтому моменты от сил тяжести пренебрежимо малы. Найти оптимальный по быстродействию закон управления, уравнение фазовых траекторий линий переключения и уравнение для расчета времени движения на участках между переключениями.

Ответ. Уравнение закона переключения [20]

$$\mu = \text{sign } \psi_2 = \text{sign } [c_1 \sin(0,1t + c_2)];$$

c_1 и c_2 определяются по начальным условиям.

Фазовые траектории являются эллипсами, описываемыми уравнениями

$$100\dot{\vartheta}^2 + (\vartheta \pm 2)^2 = c;$$

c определяются по начальным условиям.

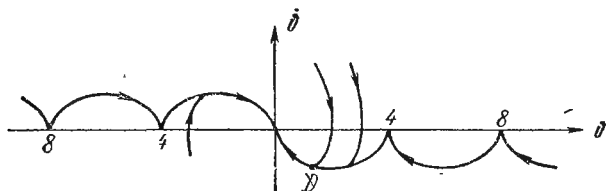


Рис. 310. Фазовая диаграмма оптимального движения спутника при наличии момента, пропорционального углу отклонений.

Линия переключения состоит из полуэллипсов, смыкающихся к оси ϑ (рис. 310) [20]. Уравнение линии переключения для n -го полуэллипса

$$\dot{\vartheta}_{\text{пн}} = - \sqrt{(\vartheta - 4n)^2 + 4(\vartheta - 4n)} \text{sign } \vartheta \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Уравнение для расчета времени движения изображающей точки от момента t_1 до момента ближайшего

переключения t_2 равно

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = 0,1c'_1 [\cos(0,1t_2 + c'_2) - \cos(0,1t_1 + c'_2)] \pm 0,02(t_2 - t_1).$$

c'_1 и c'_2 — постоянные для данной траектории, вычисленные по известным значениям $\dot{\theta}$ и θ в моменты t_1 .

Логическое устройство должно вырабатывать управляющие сигналы в соответствии с формулами (8) задачи 436.

438. Найти оптимальный по быстродействию закон управления электрическим приводом с двигателем независимого возбуждения (рис. 311), уравнения фазовых траекторий и уравнение линии переключения. Суммарный момент инерции на валу двигателя $J = 50 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$. Пусковой момент, развиваемый двигателем при $u_y =$

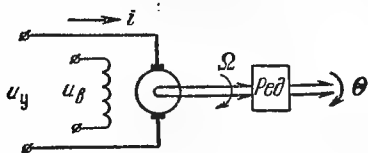


Рис. 311. Электрический привод с двигателем постоянного тока.

$= u_{ym} = 30 \text{ в}$, $M_n = 0,785 \text{ кг} \cdot \text{м}$. При этом напряжении скорость холостого хода $\Omega_{х.х} = 3000 \text{ об/мин}$. В качестве выходной величины рассматривать угол θ поворота вала на выходе редуктора, имеющего коэффициент редукции $K_p = 10^{-4}$. Пренебречь индуктивностью цепи якоря. Учесть ограничение $u_y \leq u_{ym} = 30 \text{ в}$.

Ответ. Закон управления [20, 28]

$$\mu = \text{sign } \psi_2 = \text{sign} \left[c_1 + c_2 \left(1 - e^{\frac{t}{T}} \right) \right].$$

Уравнение фазовых траекторий

$$\theta = \theta_0 + 0,2(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}) - 6,28 \cdot 10^{-3} \mu \ln \frac{\mu - 32\dot{\theta}}{\mu - 32\dot{\theta}_0}.$$

Уравнение линии переключения

$$\theta_n = - [0,2|\dot{\theta}| + 6,28 \cdot 10^{-3} \ln(1 + 32|\dot{\theta}|)] \text{sign } \dot{\theta}.$$

θ_0 и $\dot{\theta}_0$ — начальные значения угла и скорости его изменения на рассматриваемом участке оптимального процесса.

§ 17.2. Синтез оптимальных систем методом динамического программирования и классического вариационного исчисления

439. Электрический привод с двигателем постоянного тока независимого возбуждения (рис. 312) нагружен моментом вязкого трения $M_H = k_1 \Omega$ большой величины и работает в режиме, при котором падение напряжения $u_1 = i(r_d + r_{я})$ на сопротивлении $r = r_d + r_{я}$ значительно больше обратной электродвижущей силы $e = c_e \Omega$. Определить закон управления электродвигателем, при котором суммарная энергия потерь, затрачиваемая на преодоление момента вязкого трения и на нагрев, будет минимальна. Влиянием индуктивности в цепи якоря пренебречь. Момент инерции якоря с объектом $J = 0,2 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, коэффициенты пропорциональности двигателя по э. д. с. $c_e = 0,096 \text{ в} \cdot \text{сек}$ и по моменту $c_m = 30 \text{ Г} \cdot \text{см}/\text{а}$, $k_1 = 10 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$, $r_d + r_{я} = 5 \text{ ом}$.

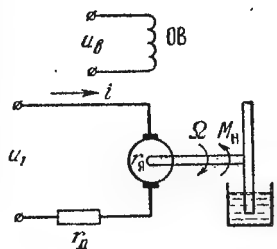


Рис. 312. Электрический привод с двигателем постоянного тока, нагруженный моментом вязкого трения.

Решение. Уравнение моментов двигателя имеет вид

$$J \frac{d\Omega}{dt} + k_1 \Omega = c_m i. \quad (1)$$

По условиям задачи индуктивность цепи якоря мала. Поэтому, в соответствии с законом Кирхгофа,

$$ir + c_e \Omega = u_y, \quad (2)$$

откуда следует

$$i = \frac{u_y}{r} - \frac{c_e}{r} \Omega.$$

Подставляя это выражение в (1), найдем

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{u_y}{r} c_m - \left(\frac{c_e c_m}{r} + k_1 \right) \Omega.$$

Поскольку $\frac{c_e c_M}{r} = \frac{0,096 \cdot 30}{5} = 0,52 \ll k_1 = 10$, пренебрежем первым членом в скобках. Поэтому приближенно уравнение динамики примет вид

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -k_1 \Omega + \frac{c_M}{r} u_y.$$

Подставив численные значения и упростив, получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = b\Omega + m u_y, \quad (3)$$

где $b = -50 \text{ сек}^{-1}$, $m = 30 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$.

Нам необходимо определить u_y как функцию Ω .

По условиям задачи двигатель работает в режиме, при котором $c_e \Omega \ll ir$. Следовательно, приближенно

$$i \approx \frac{u_y}{r}. \quad (4)$$

Мощность электрических потерь вычисляется по формуле.

$$P_s = i u_y = \frac{u_y^2}{r}. \quad (5)$$

Мощность потерь на вязкое трение, если момент M_n выразить в $\Gamma \cdot \text{см}$, составляет величину

$$P_M = 9,81 \cdot 10^{-5} M_n \cdot \Omega = 9,81 \cdot 10^{-5} k_1 \Omega^2.$$

Таким образом, минимизируемый функционал, представляющий суммарную энергию потерь, имеет вид

$$I = \int_0^{\infty} \left(9,81 \cdot 10^{-5} k_1 \Omega^2 + \frac{1}{r} u_y^2 \right) dt.$$

С учетом числовых значений получим

$$I = \int_0^{\infty} (a_1 \Omega^2 + a_0 u_y^2) dt, \quad (6)$$

где

$$a_1 = 0,981 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{сек}; \quad a_0 = 0,2 \frac{\text{Дж}}{\text{сек} \cdot \text{в}^2}.$$

Задачу отыскания оптимального управления, обеспечивающего минимум интеграла (6), будем решать методом динамического программирования. Тогда для рассматриваемой системы уравнения динамического программирования запишутся

$$\left. \begin{aligned} a_1 \Omega^2 + a_0 u_y^2 + (b\Omega + m u_y) \frac{\partial \psi}{\partial \Omega} &= 0, \\ 2a_0 u_y + m \frac{\partial \psi}{\partial \Omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где ψ — вспомогательная функция, определяемая уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = -V,$$

V — подынтегральная функция минимизируемого функционала.

Решив второе уравнение системы (7), найдем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \Omega} = -\frac{2a_0}{m} u_y. \quad (8)$$

Подстановка этого значения $\frac{\partial \psi}{\partial \Omega}$ в первое уравнение (7) дает

$$m a_0 u_y^2 + 2a_0 b \Omega u_y - a_1 m \Omega^2 = 0.$$

В результате решения получаем

$$u_y = -k\Omega, \quad (9)$$

где

$$k = \frac{b}{m} + \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 + \frac{a_1}{a_0}}.$$

Используя числовые значения, находим

$$k = -\frac{50}{30} + \sqrt{\left(\frac{50}{30}\right)^2 + \frac{0,981 \cdot 10^{-3}}{0,2}} \approx 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ в} \cdot \text{сек.}$$

Таким образом, искомый оптимальный в смысле минимума потерь закон управления является линейным (рис. 313).

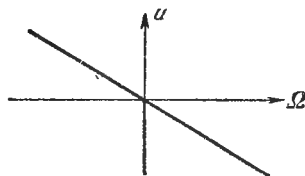


Рис. 313. Функция оптимального управления.

Следует иметь в виду, что в силу сделанного ранее допущения $c_e \Omega \ll ir$, полученный закон справедлив в области малых значений $\Omega \ll \frac{u_y}{c_{\#}}$.

440. Решить задачу 439 для следующих двух случаев: а) $k_1 = 0,1 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$, б) $r_{\text{я}} + r_{\text{д}} = 100 \text{ ом}$, при неизменных остальных исходных данных.

Ответ.

а) $k = 0,088 \text{ в} \cdot \text{сек}$;

б) $k = 0,442 \cdot 10^{-4} \text{ в} \cdot \text{сек}$.

441. Решить задачу 439, применив классические вариационные методы [2, 20].

Решение. Уравнение динамики системы имеет вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = b\Omega + m u_y.$$

Необходимо найти закон изменения $u_y = u_y(\Omega)$, минимизирующий интеграл потерь

$$I = \int_0^{\infty} (a_1 \Omega^2 + a_0 u_y^2) dt.$$

Для решения поставленной задачи необходимо составить функцию [2]

$$H = V + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i, \quad (1)$$

где

$$V = \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 + a_0 u_y^2$$

— подынтегральная функция минимизируемого функционала;

$$z_i = \frac{dx_i}{dt} - (b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n + m_i u_y) = 0$$

— функция, представляющая уравнение первого порядка по i -й переменной; λ_i — произвольный множитель.

Дифференцируя функцию H , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{d\dot{x}_i} &= \lambda_i, & \frac{dH}{dx_i} &= 2a_i x_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j b_{ji}, \\ \frac{dH}{d\dot{u}} &= 0, & \frac{dH}{du} &= 2a_0 u_y - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Отсюда уравнения вариационной задачи имеют вид

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = - \sum_{i=1}^n b_{ji} \lambda_i + 2a_i x_i, \quad 0 = 2a_0 u_y - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j. \quad (3)$$

В рассматриваемом случае

$$z = \frac{d\Omega}{dt} - (b\Omega + mu_y) = 0, \quad (4)$$

$$V = (a_1 \Omega^2 + a_0 u_y^2). \quad (5)$$

На основе (2) и (3), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -b\lambda_1 + 2a_1 \Omega, \\ 0 &= 2a_0 u_y - m\lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решая эту систему относительно переменных λ_1 и Ω , после исключения функции времени из полученных решений и алгебраических преобразований, получим

$$u_y = -k\Omega, \\ k = \frac{b}{m} + \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 + \frac{a_1}{a_0}}.$$

После подстановки численных значений находим

$$k = 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ в} \cdot \text{сек.}$$

СИСТЕМЫ С ЦИФРОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ МАШИНАМИ (ЦВМ)

§ 18.1. Передаточные функции систем с ЦВМ при учете квантования по времени

442. Система регулирования имеет в своем контуре цифровую вычислительную машину (ЦВМ). Структурная схема системы показана на рис. 314. Найти z -передаточные функции разомкнутой системы в предположении, что запаздывание в ЦВМ отсутствует и можно

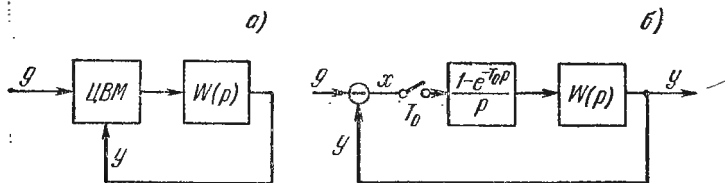


Рис. 314. а) Блок-схема системы с ЦВМ; б) эквивалентная структурная схема.

пренебречь влиянием квантования по уровню, т. е. можно рассматривать линейную задачу.

Передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)}. \quad (1)$$

Численные значения коэффициентов: общий коэффициент усиления $K = 10 \text{ сек}^{-1}$, постоянная времени $T_1 = 0,05 \text{ сек}$ и период дискретности ЦВМ $T_0 = 0,1 \text{ сек}$.

Решение. Передаточная функция $W(z)$ разомкнутой системы может быть найдена согласно [35, 38]

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_0) z^{-n} = \frac{z-1}{z} F(z), \quad (2)$$

где $h(nT_0)$ — переходная функция непрерывной части в дискретные моменты времени ($n=0, 1, 2, \dots$), а $F(z)$ представляет собой z -преобразование этой функции.

Переходная функция для (1) имеет вид

$$h(t) = K \left[t - T_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \right]. \quad (3)$$

По таблице z -преобразований находим

$$F(z) = K \left[\frac{T_0 z}{(z-1)^2} - T_1 \frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)} \right], \quad (4)$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T}} = e^{-2} = 0,135$.

Далее из (2) находим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) = K \left[\frac{T_0}{z-1} - \frac{T_1(1-d)}{z-d} \right] = \frac{KT_0 \left[z-d - \frac{T_1}{T_0}(1-d)(z-1) \right]}{(z-1)(z-d)}. \quad (5)$$

Поскольку переходная функция $h(t)$ является преобразованием Лапласа от передаточной функции непрерывной части $W(p)$, деленной на p , т. е.

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\},$$

то часто используют символическую запись формулы (2)

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}. \quad (6)$$

При этом дискретная передаточная функция может определяться в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^2(1+T_1 p)} \right\} = \\ &= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{-T}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{T}{p + \frac{1}{T}} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

z -преобразование каждого слагаемого в правой части (7) нетрудно определить, воспользовавшись таблицей z -преобразования (приложение 2),

$$\begin{aligned} W(z) &= K \frac{z-1}{z} \left[\frac{-T_1 z}{z-1} + \frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{z T_1}{z-d} \right] = \\ &= K \left[-T_1 + \frac{T_0}{z-1} + \frac{T_1(z-1)}{z-d} \right] = \\ &= \frac{K T_0 \left[z-d - \frac{T_1}{T_0} (1-d)(z-1) \right]}{(z-1)(z-d)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Окончательное выражение (8), естественно, совпадает с (5).

Подстановка численных значений дает

$$W(z) = \frac{0,568z + 0,297}{(z-1)(z-d)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{0,568z + 0,297}{z^2 - 0,567z + 0,432}.$$

443. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Ответ.

$$W(z) = K \left[\frac{T_0}{z-1} + \frac{T_1^2}{T_1 - T_2} \cdot \frac{z-1}{z-d_1} + \frac{T_2^2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{z-1}{z-d_2} - (T_1 + T_2) \right],$$

где $d_1 = e^{-\frac{T_0}{T_1}}$ и $d_2 = e^{-\frac{T_0}{T_2}}$.

444. Для системы с ЦВМ (см. рис. 314) определить дискретные передаточные функции, используя модифицированное z -преобразование.

Передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p}.$$

Решение.

$$W(z, \sigma) = \frac{z-1}{z} Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z_{\sigma} \left\{ \frac{K}{p^2} \right\}, \quad (1)$$

где символ Z_σ означает модифицированное z -преобразование; σ — относительное (безразмерное) время $0 \leq \sigma < 1$, означает, что рассматривается смещенная решетчатая функция для моментов времени $t = nT_0 + \sigma T_0$.

Обращаясь к таблице модифицированного z -преобразования, получим

$$W(z, \sigma) = KT_0 \frac{\sigma z + 1 - \sigma}{z - 1}, \quad (2)$$

$$\Phi(z, \sigma) = \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)}, \quad (3)$$

где $W(z)$ — дискретная передаточная функция разомкнутой системы при $\sigma = 0$.

Окончательно имеем

$$\Phi(z, \sigma) = \frac{KT_0(\sigma z + 1 - \sigma)}{z - 1 + KT_0}.$$

445. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{1 + T_p}.$$

Ответ.

$$W(z, \sigma) = K \frac{(1 - d^\sigma)z + d^\sigma - d}{z - d}, \quad \text{где } d = e^{-\frac{T_0}{T}},$$

$$\Phi(z, \sigma) = \frac{K[(1 - d^\sigma)z + d^\sigma - d]}{z - d + K - Kd}.$$

446. Для системы с ЦВМ (см. рис. 314) определить дискретные передаточные функции разомкнутой системы, используя z -преобразование и w -преобразование.

Передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1^2 p^2)}.$$

Решение.

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^2(1 + T_1^2 p^2)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^2} - \frac{KT_1^2}{1 + T_1^2 p^2} \right\},$$

$$W(z) = \frac{KT_0}{z-1} - \frac{T_1(z-1) \sin \frac{T_0}{T_1}}{z^2 - 2z \cos \frac{T_0}{T_1} + 1}.$$

Для перехода к w -преобразованию используем подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$, откуда

$$W(w) = \frac{K \frac{T_0}{2} (1-w) \left[1 + \frac{\left(1 - 2 \frac{T_1}{T_0} \operatorname{tg} \frac{T_0}{T_1}\right)}{\operatorname{tg}^2 \frac{T_0}{2T_1}} w^2 \right]}{w \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{T_0}{2T_1}} w^2 \right)}.$$

447. Для системы регулирования при учете временного запаздывания τ , вносимого ЦВМ (рис. 315), определить дискретные передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы.

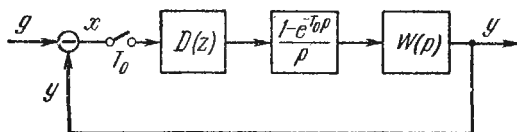


Рис. 315. Структурная схема системы с ЦВМ при учете временного запаздывания.

Передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p} e^{-\tau p},$$

где $\tau = \varepsilon T_0$ — временное запаздывание, $0 < \varepsilon \leq 1$, $D(z) = 1$.

Решение. Дискретная передаточная функция разомкнутой системы при наличии чистого запаздывания определяется как

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(p)}{p} e^{-\tau p} \right\} \quad (1)$$

или

$$W(z) = z^{-1} W(z, \sigma) \Big|_{\text{при } \sigma=1-\varepsilon}. \quad (2)$$

Таким образом, учитывая результат решения задачи 445, получим

$$W_{\tau}(z) = z^{-1} K T_0 \frac{\sigma z + 1 - \sigma}{z - 1} \Big|_{\sigma=1-\varepsilon}$$

или

$$W(z) = \frac{KT_0 [(1-\varepsilon)z + \varepsilon]}{z(z-1)}, \quad (3)$$

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = KT_0 \frac{(1-\varepsilon)z + \varepsilon}{z^2 + [KT_0(1-\varepsilon) + 1]z + KT_0\varepsilon}. \quad (4)$$

448. Для автоматической системы (рис. 316), в которой ЦВМ осуществляет дискретную коррекцию, определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы.

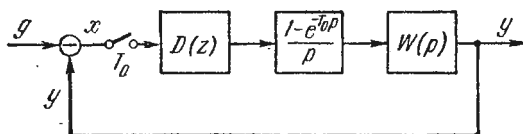


Рис. 316. Структурная схема цифровой системы с дискретной коррекцией.

Передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p^2}. \quad (1)$$

Закон управления, реализуемый ЦВМ, описывается разностным уравнением вида (см. приложение 23)

$$u(nT_0) = a_0 x(nT_0) - a_1 x[(n-1)T_0]. \quad (2)$$

Решение. Дискретная передаточная функция разомкнутой скорректированной системы —

$$W_{\text{ск}}(z) = D(z) W(z), \quad (3)$$

где

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p^3} \right\} = \frac{KT_0^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

— дискретная передаточная функция, соответствующая приведенной непрерывной части системы;

$D(z)$ — передаточная функция ЦВМ, выполняющей роль дискретного корректирующего устройства.

Для определения $D(z)$ проведем z -преобразование обеих частей равенства (2)

$$U(z) = (a_0 - a_1 z^{-1}) X(z). \quad (4)$$

Отсюда

$$D(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = a_0 - a_1 z^{-1} = \frac{a_0 z - a_1}{z}. \quad (5)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$W_{\text{ск}}(z) = \frac{KT_0^2 a_1 (z+1) \left(\frac{a_0}{a_1} z - 1 \right)}{2z(z-1)^2},$$

$$\Phi_{\text{ск}}(z) = \frac{W_{\text{ск}}(z)}{1 + W_{\text{ск}}(z)} = \frac{KT_0^2 a_1 (z+1) \left(\frac{a_0}{a_1} z - 1 \right)}{2z(z-1)^2 + KT_0^2 a_1 (z+1) \left(\frac{a_0}{a_1} z - 1 \right)}.$$

§ 18.2. Устойчивость и оценка качества

449. Передаточная функция разомкнутой системы регулирования с ЦВМ имеет вид

$$W(z) = \frac{KT_0}{z-1}.$$

Найти условие устойчивости замкнутой системы и построить переходный процесс при подаче на вход системы единичной ступенчатой функции $g(t) = 1(t)$ для $KT_0 = 1$, $KT_0 = 0,5$ и $KT_0 = 1,5$.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{KT_0}{z-1+KT_0}.$$

Для определения условия устойчивости воспользуемся алгебраическим критерием устойчивости. Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$z - 1 + KT_0 = 0.$$

Условие устойчивости

$$KT_0 < 2. \quad (1)$$

Перейдем к построению переходных процессов путем разложения изображений входной величины в ряд Лорана.

Рассмотрим случай $KT_0 = 1$. При этом передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$\Phi(z) = \frac{KT_0}{z-1+KT_0} = \frac{1}{z}. \quad (2)$$

Изображение входной величины (см. приложение 13)

$$Z\{1(t)\} = G(z) = \frac{z}{z-1}. \quad (3)$$

Изображение выходной величины

$$Y(z) = \Phi(z) G(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}. \quad (4)$$

Разложим последнее выражение в ряд Лорана посредством деления числителя на знаменатель:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \quad (5)$$

Это дает следующие значения функции y на выходе в дискретные моменты времени: при $t=0$ $y=0$; при $t=T_0$ $y=1$; при $t=2T_0$ $y=1$; при $t=3T_0$ $y=1$ и далее $y=1$ при всех значениях $t=nT_0$. График этой функции изображен на рис. 317 (кривая 1).

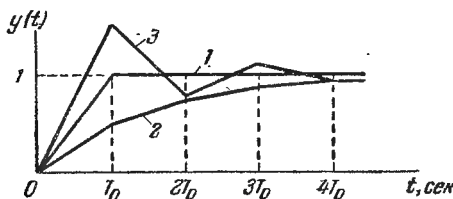


Рис. 317. Переходные процессы к задаче 449.

Между дискретными значениями функции времени на выходе проведены прямые линии, так как передаточная функция (1) соответствует идеальному интегрирующему звену, переходная функция которого представляет собой прямую линию.

Аналогичным образом получен ряд Лорана для $KT_0 = 0,5$:

$$Y(z) = 0,5 \frac{1}{z} + 0,75 \frac{1}{z^2} + 0,875 \frac{1}{z^3} + 0,9375 \frac{1}{z^4} + \dots$$

График переходной функции изображен на рис. 317 (кривая 2).

Для случая $KT_0 = 1,5$ получаем

$$Y(z) = 1,5 \frac{1}{z} \pm 0,75 \frac{1}{z^2} + 1,125 \frac{1}{z^3} + 0,8375 \frac{1}{z^4} + \dots$$

График переходной функции для этого случая изображен на рис. 317 (кривая 3).

450. Определить, устойчива ли система регулирования, структурная схема которой соответствует рис. 314. Передаточная функция непрерывной части

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где $K = 2 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $T_2 = 0,05 \text{ сек}$. Период дискретности $T_0 = 0,2 \text{ сек}$.

Ответ. Система устойчива.

451. Передаточная функция непрерывной части системы с ЦВМ имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p}, \quad (1)$$

где $K = 50 \text{ сек}^{-1}$ — общий коэффициент усиления. Определить допустимое значение периода дискретности T_0 для ЦВМ, при котором показатель колебательности замкнутой системы не будет превышать $M = 1,5$. Запозывание в ЦВМ равно нулю и влиянием квантования по уровню можно пренебречь.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы с ЦВМ может быть найдена согласно

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{KT_0 z}{(z-1)^2}, \quad (2)$$

$$W(z) = \frac{KT_0}{z-1}. \quad (3)$$

Построим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы по выражению (3). Выполним

подстановку

$$z = e^{j\omega T_0} = \cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0.$$

В результате получаем частотную передаточную функцию

$$W(e^{j\omega T_0}) = \frac{KT_0}{\cos \omega T_0 - 1 + j \sin \omega T_0} = -\frac{KT_0}{2} - j \frac{KT_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T_0}{2}.$$

Нетрудно видеть, что амплитудно-фазовая характеристика представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и отстоящую от нее на расстоянии $\frac{KT_0}{2}$ (рис. 318).

Для того чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения, амплитудно-фазовая характеристика не должна заходить в окружность, представляющую собой запретную зону. Она изображена на рис. 318 пунктиром. Отсюда получаем условие

$$\frac{KT_0}{2} \leq \frac{M}{M+1}. \quad (4)$$

Допустимый период дискретности

$$T_0 \leq \frac{2}{K} \frac{M}{M+1}.$$

Для заданных числовых значений

$$T_0 \leq \frac{2}{50} \cdot \frac{1,5}{1,5+1} =$$

$$= 0,024 \text{ сек.}$$

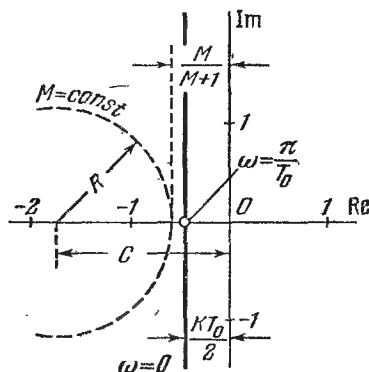


Рис. 318. А. ф. х. к задаче 451.

452. Для системы регулирования, рассмотренной в задаче 447, определить условия устойчивости и построить область устойчивости в плоскости двух параметров, KT_0 и $\varepsilon = \frac{\tau}{T_0}$.

Решение. Воспользуемся результатом (4), полученным в задаче 447. Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать в виде

$$z^2 + [KT_0(1 - \varepsilon) - 1]z + KT_0\varepsilon = 0$$

или

$$z^2 + Az + B = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A &= KT_0(1 - \epsilon) - 1, \\ B &= KT_0\epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия устойчивости для уравнений второй степени имеют вид

$$\left. \begin{aligned} 1 + A + B &> 0, \\ 1 - A + B &> 0, \\ B &< 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Используя (2), получим следующие условия устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} KT_0 &> 0, \\ KT_0(1 - 2\epsilon) &< 2, \\ KT_0\epsilon &< 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Первое условие (4) выполняется тождественно. Совместное рассмотрение двух последних неравенств (4)

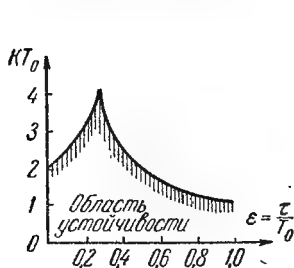


Рис. 319. Область устойчивости к задаче 452.

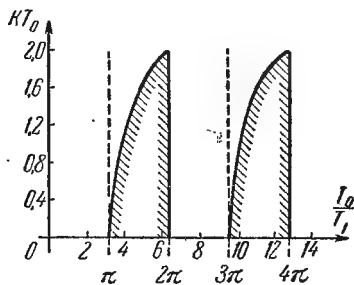


Рис. 320. Область устойчивости к задаче 453.

дает возможность записать условие устойчивости системы в окончательном виде так:

$$KT_0 = \begin{cases} \frac{2}{1 - 2\epsilon}, & \text{если } 0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{\epsilon}, & \text{если } \frac{1}{4} \leq \epsilon \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Область устойчивости в плоскости параметров KT_0 , ε , построенная по уравнению (5), показана на рис. 319.

453. Для системы регулирования, рассмотренной в задаче 446, построить область устойчивости в плоскости параметров KT_0 , $\frac{T_0}{T_1}$.

Ответ. Область устойчивости в плоскости параметров показана на рис. 320.

§ 18.3. Синтез систем с ЦВМ

454. Передаточная функция непрерывной части системы регулирования с ЦВМ имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p^2}, \quad (1)$$

где $K = 100 \text{ сек}^{-2}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи регулирования, а τ — постоянная времени корректирующего устройства. Определить допустимое значение периода дискретности T_0 ЦВМ и требуемое значение постоянной времени корректирующего устройства, чтобы показатель колебательности не превышал значения $M = 1, 3$, если запаздывание в ЦВМ равно нулю, а влиянием квантования по уровню можно пренебречь.

Решение. Определим передаточную функцию разомкнутой системы совместно с ЦВМ:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^3} + \frac{K\tau}{p^2} \right\}. \quad (2)$$

В соответствии с приложением 13

$$Z \left\{ \frac{K}{p^3} + \frac{K\tau}{p^2} \right\} = \frac{KT_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} + \frac{KT_0 \tau z}{(z-1)^2}. \quad (3)$$

Далее из (2) находим

$$W(z) = \frac{KT_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^2} + \frac{KT_0 \tau}{z-1}. \quad (4)$$

Перейдем к w -преобразованию, используя подстановку

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (5)$$

В результате получаем

$$W(w) = \frac{KT_0^2}{4} \frac{\left(1 + 2 \frac{\tau}{T_0} w\right) (1 - w)}{w^2}. \quad (6)$$

Получим теперь частотную передаточную функцию посредством подстановки

$$w = j \frac{T_0}{2} \lambda, \quad (7)$$

где λ представляет собой абсолютную псевдочастоту. Используя подстановку (7), имеем из (6)

$$W(j\lambda) = \frac{K(1 + j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right)}{(j\lambda)^2}. \quad (8)$$

Модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы равен

$$|W(j\lambda)| = \frac{K \sqrt{1 + \tau^2 \lambda^2} \sqrt{1 + \frac{T_0^2}{4} \lambda^2}}{\lambda^2}, \quad (9)$$

а фаза

$$\psi(\lambda) = -180^\circ + \operatorname{arctg} \tau \lambda - \operatorname{arctg} \frac{T_0 \lambda}{2}. \quad (10)$$

По выражению (9) на рис. 321 построены л. а. х. По виду фазовой характеристики (10) этот случай сводится к л. а. х. типа $\Sigma - I - 2$ (см. приложения 24). В результате получаем следующие формулы для расчета: базовая псевдочастота л. а. х. равна

$$\lambda_0 = \sqrt{K} = 10 \text{ сек}^{-1},$$

требуемое значение постоянной времени корректирующего устройства

$$\tau = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,3}{1,3-1}} = 0,21 \text{ сек};$$

требуемая протяженность участка л. а. х. с наклоном 20 дБ/дек

$$h = \frac{M+1}{M-1} = \frac{1,3+1}{1,3-1} = 7,7;$$

допустимое значение периода дискретности

$$\left(\frac{T_0}{2} \leq \frac{\tau}{h} = \frac{0,21}{7,7} = 0,027 \text{ сек}, \right.$$

откуда $T_0 \leq 0,054 \text{ сек}$.

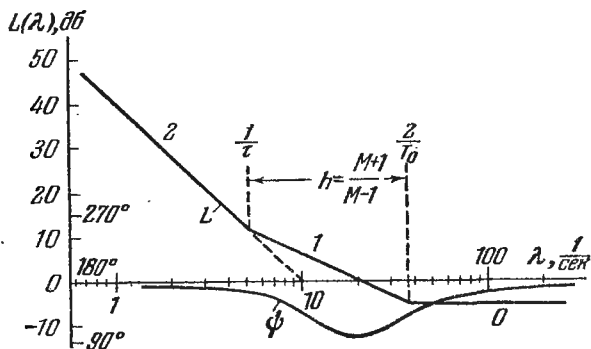


Рис. 321. Л. а. х. и л. ф. х. к задаче 454.

455. Произвести расчет следящей системы с астатизмом первого порядка, содержащей в своем контуре ЦВМ. Исходные данные: максимальная входная скорость $\Omega_{\max} = 20 \text{ град/сек}$; максимальное входное ускорение $\varepsilon_{\max} = 10 \text{ град/сек}^2$; максимальная допустимая ошибка $\vartheta_{\max} = 4'$; непрерывная часть содержит постоянные времени $T_1 = 0,01 \text{ сек}$, $T_2 = 0,002 \text{ сек}$ и $T_3 = 0,001 \text{ сек}$; допустимый показатель колебательности $M = 1,5$; запаздывание в ЦВМ равно нулю. Требуется определить параметры последовательного корректирующего звена, включаемого в непрерывную часть, допустимый период повторения T_0 для ЦВМ и построить переходный процесс при входном воздействии типа единичной ступенчатой функции. Влиянием квантования по уровню можно пренебречь.

Решение. Левее частоты среза л. а. х. системы с ЦВМ совпадает с л. а. х. непрерывной части, а абсолютная псевдочастота $\lambda = \frac{2\omega}{jT_0}$ (см. задачу 454) совпадает с реальной частотой. Поэтому формирование л. а. х.

левее частоты среза можно произвести обычными приемами.

Построим запретную зону для л. а. х. из условий точности (рис. 322). Контрольная частота

$$\lambda_k = \frac{\varepsilon_{\max}}{\Omega_{\max}} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Модуль передаточной функции разомкнутой системы при $\lambda = \lambda_k$ равен

$$|W(j\lambda_k)| = \frac{\Omega_{\max}^2}{\varepsilon_{\max} \theta_{\max}} = \frac{20^2 \cdot 60}{10 \cdot 4} = 600 = 55,6 \text{ дб}.$$

По этим данным на рис. 322 построены контрольная точка A_k и запретная зона, сформированная из прямых с наклоном 20 дб/дек и 40 дб/дек (наклоны 1 и 2).

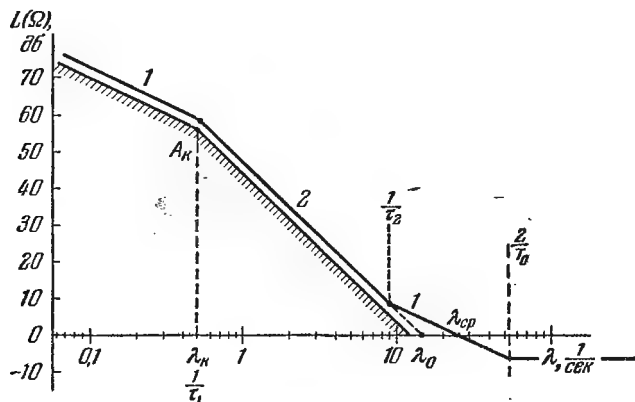


Рис. 322. Л. а. х. к задаче 455.

Желаемая л. а. х. в низкочастотной области формируется так, чтобы она проходила выше точки A_k на 3 дб, что соответствует увеличению коэффициента усиления в $\sqrt{2}$ раз. Она состоит из отрезков прямых с наклонами 1—2—1. В низкочастотной области частотная передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид

$$W(j\lambda) = \frac{K(1 + j\lambda\tau_2)}{j\lambda(1 + j\lambda\tau_1)}.$$

Определим параметры желаемой л. а. х. передаточной функции разомкнутой системы в низкочастотной части. Базовая частота л. а. х. равна

$$\lambda_0 = \sqrt{V^2 \frac{\varepsilon_{\max}}{\Phi_{\max}}} = 1,19 \sqrt{\frac{10 \cdot 60}{4}} = 14,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Постоянная времени корректирующего звена, формирующая первый излом л. а. х., равна

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda_{\text{к}}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ сек}.$$

Для получения заданного показателя колебательности должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \leq \lambda_0 \sqrt{\frac{M-1}{M}}.$$

Отсюда получаем минимальное значение второй постоянной времени корректирующего звена

$$\tau_2 = \frac{1}{\lambda_0 \sqrt{\frac{M-1}{M}} + \frac{1}{\tau_1}} = \frac{1}{14,5 \sqrt{\frac{1,5-1}{1,5}} + \frac{1}{2}} = 0,112 \text{ сек}.$$

Передаточная функция последовательного корректирующего звена равна

$$W_{\text{кз}}(p) = \frac{1 + \tau_2 p}{1 + \tau_1 p} \quad (\tau_1 > \tau_2),$$

и соответствует пассивному звену интегрирующего типа.

Далее определяем необходимое значение общего коэффициента усиления

$$K = \sqrt{2} \frac{\Omega_{\max}}{\Phi_{\max}} = 1,41 \frac{20 \cdot 60}{4} = 420 \text{ сек}^{-1}$$

и частоту среза л. а. х.

$$\lambda_{\text{с}} = \frac{K \tau_2}{\tau_1} = \frac{420 \cdot 0,112}{2} = 23,5 \text{ сек}^{-1}.$$

В соответствии с требованиями к л. а. х. в высокочастотной области имеем

$$\frac{T_0}{2} + T_1 + T_2 + T_3 \leq \frac{1}{\lambda_{\text{с}}} \frac{M}{M+1},$$

откуда получаем допустимое значение периода дискретности ЦВМ

$$T_0 \leq 2 \left[\frac{1}{\lambda_c} \cdot \frac{M}{M+1} - T_1 - T_2 - T_3 \right] = \\ = 2 \left[\frac{1}{23,5} \cdot \frac{1,5}{1,5+1} - 0,01 - 0,002 - 0,001 \right] = 0,012 \text{ сек.}$$

Переходный процесс при единичном ступенчатом воздействии изображен на рис. 323.

456. Произвести расчет системы с ЦВМ по исходным данным, приведенным в предыдущей задаче, за исключением $T_1 = 0,05 \text{ сек}$, $T_2 = 0,003 \text{ сек}$, $T_3 = 0,001 \text{ сек}$. Кроме того, в отличие от предыдущей задачи, задан период дискретности $T_0 = 0,02 \text{ сек}$.

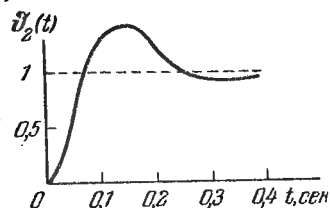


Рис. 323. Переходный процесс к задаче 455.

Требуется определить вид и параметры последовательного корректирующего устройства, которое должно быть введено в непрерывную часть системы, а также необходимое

значение общего коэффициента усиления K .

Ответ. Общий коэффициент усиления $K = 420 \text{ сек}^{-1}$. В непрерывную часть системы должно быть введено пассивное интегро-дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W_{кз}(p) = \frac{(1 + T_{2к}p)(1 + T_{3к}p)}{(1 + T_{1к}p)(1 + T_{4к}p)},$$

где $T_{1к} = 2 \text{ сек}$, $T_{2к} = 0,12 \text{ сек}$, $T_{3к} = 0,05 \text{ сек}$, $T_{4к} = 0,01 \text{ сек}$.

457. Передаточная функция непрерывной части системы с ЦВМ

$$W(p) = \frac{K}{p^2}.$$

Общий коэффициент усиления разомкнутой цепи регулирования $K = 1 \text{ сек}^{-2}$, период дискретности $T_0 = 1 \text{ сек}$. Определить закон управления, реализуемый при помощи ЦВМ (см. рис. 316), который бы обеспечил оптимальное в смысле минимума времени протекания про-

цессов регулирование при отработке ступенчатых воздействий, т. е. обеспечил бы системе конечное время регулирования.

Решение. Дискретная передаточная функция непрерывной части системы

$$W(z) = 0,5 \frac{z+1}{z^2-2z+1} = 0,5 \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}.$$

Желаемую передаточную функцию замкнутой системы возьмем в виде

$$\Phi(z) = 0,5z^{-1} + 0,5z^{-2}.$$

При этом переходные процессы в системе будут заканчиваться за два периода дискретности

$$Y(z) = \Phi(z) \frac{z}{z-1} = \frac{0,5z^2 + 0,5z}{z^3 - z^2} = 0,5z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Дискретная передаточная функция ЦВМ равна

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \cdot \frac{1}{W(z)} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0,5z - 0,5} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}.$$

Отсюда закон управления, реализуемый ЦВМ, может быть записан окончательно в виде рекуррентного соотношения

$$u(nT_0) = x(nT_0) - 2x[(n-1)T_0] + \\ + x[(n-2)T_0] + 0,5u[(n-1)T_0] + 0,5u[(n-2)T_0].$$

458. Произвести расчет системы с ЦВМ, непрерывная часть которой имеет те же данные, что и в предыдущей задаче. Рассчитать дискретное последовательное корректирующее устройство $D(z)$ и период дискретности T_0 таким образом, чтобы обеспечить запас устойчивости, оцениваемый показателем колебательности, не менее, чем $M \leq 1,5$.

Решение. Произведем расчет методом логарифмических частотных характеристик.

Дискретная частотная передаточная функция исходной нескорректированной системы равна

$$W(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right)}{(j\lambda)^2}. \quad (1)$$

Желаемую дискретную передаточную функцию возьмем в виде

$$W_{\text{ж}}(j\lambda) = \frac{K(1 + j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2}\right)}, \quad (2)$$

где

$$\tau \geq \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 1,73 \text{ сек},$$

$$\lambda_0 = \sqrt{K} = 1 \text{ сек}^{-1},$$

$$T_0 \leq \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}} = 0,5 \text{ сек},$$

$$\frac{T_0}{2} = 0,25 \text{ сек}.$$

Передаточная функция дискретного корректирующего устройства примет вид

$$D(j\lambda) = \frac{W_{\text{ж}}(j\lambda)}{W(j\lambda)} = \frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2}}. \quad (3)$$

Соответствующие логарифмические частотные характеристики построены на рис. 324.

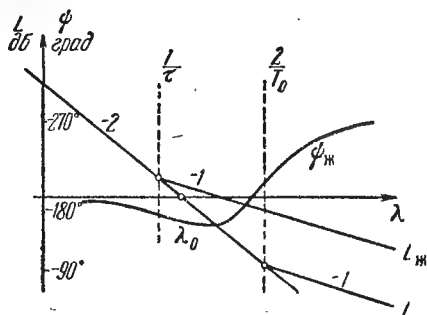


Рис. 324. Логарифмические частотные характеристики к задаче 458.

Перейдем к z -преобразованию, используя подстановку

$$\frac{U(z)}{X(z)} = D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2\tau}{T_0}\right)z + 1 - \frac{2\tau}{T_0}}{2z} = b_0 + b_1 z^{-1}, \quad (4)$$

где

$$b_0 = \frac{1 + \frac{2\tau}{T_0}}{2} = 3,96, \quad b_1 = \frac{1 - \frac{2\tau}{T_0}}{2} = -2,96,$$

откуда закон управления, реализуемый при помощи ЦВМ, имеет вид

$$u(nT_0) = b_0 x(nT_0) + b_1 x[(n-1)T_0], \quad (5)$$

т. е. используется управление по отклонению и первой разности (см. приложение 23).

459. Рассчитать дискретное последовательное корректирующее устройство $D(z)$ и период дискретности T_0 из условия получения необходимого запаса устойчивости системы. Система с ЦВМ имеет передаточную функцию непрерывной части вида

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 - 1},$$

где $K = 90$; $T^2 = 10 \text{ сек}^2$. Требуемый показатель колебательности $M \leq 1,5$.

Ответ. $D(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$, где $b_0 = 4$, $b_1 = -3$, $T_0 = 0,166 \text{ сек}$.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ И САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ

§ 19.1. Составление структурных схем экстремальных и самонастраивающихся систем и исследование их устойчивости

460. Найти передаточную функцию и составить структурную схему системы автоматической подстройки частоты, изображенной на рис. 325. Система должна подстраивать колебательный контур, состоящий из индуктивности L и суммарной емкости $C = C_1 + C_{20}$, в резонанс с входным сигналом $u_y(t) = u_{0m} \sin 2\pi f_0 t$. Подстройка контура в резонанс осуществляется изменением величины переменной емкости C_1 с помощью двигателя постоянного тока D_1 . Поиск резонанса обеспечивается синхронным детектированием входного сигнала с помощью синхронного детектора $СД$ и переменного конденсатора C_2 малой емкости, величина которой изменяется по закону $C_2 = C_{20} + C_{2m} \sin \omega_1 t$ вращением его пластин двигателем D_2 с постоянной угловой скоростью ω_1 . Опорное напряжение частоты ω_1 на синхронный детектор подается с генератора $ГОН$, приводимого во вращение двигателем D_2 .

С резонансного контура сигнал подается на безынерционный усилитель с коэффициентом усиления k_y , на выходе которого имеется выпрямитель и фильтр Φ_1 , настроенный на частоту сигнала ω_1 , с коэффициентом усиления $k_{\Phi 1}$ и полосой пропускания $\Delta f_1 = 1000$ гц. После синхронного детектора $СД$ также имеется фильтр Φ_2 с коэффициентом усиления $k_{\Phi 2}$ и полосой пропускания

$\Delta f_2 = 20$ гц. Фильтры Φ_1 и Φ_2 являются апериодическими звеньями первого порядка.

Поиск экстремума осуществляется следующим образом. При расстройке резонансного контура на выходе синхронного детектора возникает сигнал, пропорциональный производной $\frac{du_{2m}}{d\omega_0}$.

После сглаживания фильтром Φ_2 он поступает на двигатель, вследствие чего емкость C_1 изменяется до тех пор, пока производная $\frac{du_{2m}}{d\omega_0}$ не станет равной нулю. Это положение и будет соответствовать резонансу.

Исходные данные для расчета передаточных функций: $R = 10^3$ ом, $C_{10} = 400$ нф, $L = 0,5$ гн, $f_0 = 10^4$ гц, $C_2 = 100 + 50 \sin \omega_1 t$ нф, коэффициенты передачи фильтров $k_{\Phi 1} = k_{\Phi 2} = 0,8$, действующее значение вход-

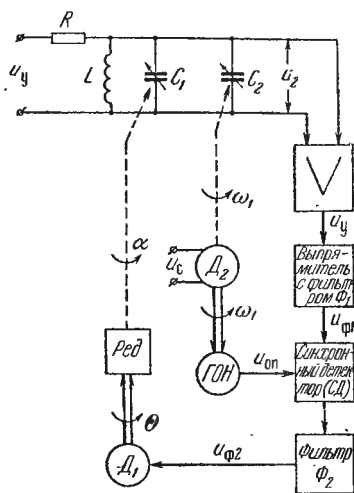


Рис. 325. Система автоматической подстройки частоты.

ного напряжения $U_1 = \frac{u_{om}}{\sqrt{2}} = 100$ в. Двигатель D_1 развивает 3000 об/мин при напряжении 30 в. Редуктор (Ред) имеет коэффициент передачи $k_{ред} = 10^{-3}$. Емкость конденсатора C_1 меняется на 80 нф при повороте его пластин на 1 рад. Входное сопротивление усилителя считать равным бесконечности.

Решение. Структурная схема и передаточная функция данной системы могут быть представлены в двух вариантах в зависимости от выбора регулируемых величин. В качестве последних могут быть приняты частота входного сигнала f_0 или емкость резонансного контура $C = C_1 + C_{20}$. Рассмотрим оба варианта.

Если за регулируемую величину принять частоту $\omega_0 = 2\pi f_0$, то структурная схема системы будет иметь

вид, представленный на рис. 326. Передаточные функции входящих в систему элементов определяются следующим образом.

1. $W_{\kappa 1}(p) = \frac{\Delta U_2(p)}{\Delta \Omega_0(p)}$ — передаточная функция, характеризующая, как изменяется действующее напряжение

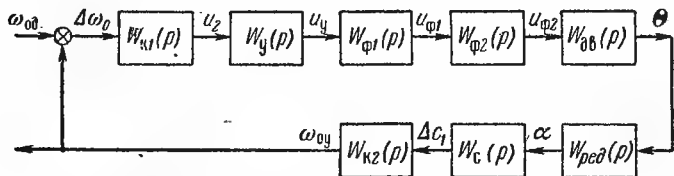


Рис. 326. Структурная схема автоматической системы подстройки частоты с регулируемой величиной ω_0 .

на выходе резонансного контура u_2 при изменении частоты сигнала f_0 . Будем ее искать в предположении, что сам контур является безынерционным звеном, так как работа происходит вблизи резонансной частоты. Фаза несущей частоты f_0 не играет существенной роли ввиду наличия выпрямителя. С учетом этих допущений из схемы включения контура (см. рис. 325) следует

$$U_2 = \frac{U_1 |z_K(\omega)|}{|R + z_K(\omega)|}, \quad (1)$$

где $z_K(\omega) = \frac{\omega_0 L}{(\omega_0^2 CL - 1)}$ — сопротивление резонансного контура. Учитывая это, получим

$$U_2 = U_1 \frac{\omega_0 L}{\sqrt{R^2 (\omega_0^2 CL - 1)^2 + \omega_0^2 L^2}} \text{ в.} \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{\partial U_2}{\partial \omega_0} = \frac{U_1 R^2 L (1 - \omega_0^4 C^2 L^2)}{[R^2 (\omega_0^2 CL - 1)^2 + \omega_0^2 L^2]^{3/2}} \text{ в} \cdot \text{сек.} \quad (3)$$

При резонансе $\omega_0^2 CL = 1$ эта производная равна нулю.

При отклонениях частоты ω_0 от резонансной, зависимость $\frac{dU_2}{d\omega_0}$ от ω в общем случае нелинейная. Поэтому

передаточная функция $W_{к1}(p)$ в общем случае может быть представлена в виде

$$W_{к1}(p) = k_{к1}(\omega). \quad (4)$$

Если частота входного сигнала отклонится на $\pm 10\%$ от $f_0 = 10^4$ гц, то

$$k_{к1}(\omega) = \begin{cases} -5,7 \cdot 10^{-7} \text{ в} \cdot \text{сек} & \text{при } f = f_0 + 0,1f_0, \\ 0 & \text{при } f = f_0, \\ 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ в} \cdot \text{сек} & \text{при } f = f_0 - 0,1f_0. \end{cases}$$

2. $W_y(p) = k_y$ — передаточная функция усилителя.

3. $W_{\phi 1}(p) = \frac{k_{\phi 1}}{T_1 p + 1}$ — передаточная функция первого фильтра. Постоянная времени

$$T_1 = \frac{1}{\pi \Delta f_1} = \frac{1}{3,14 \cdot 1000} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ сек.}$$

4. $W_{\phi 2}(p) = \frac{k_{\phi 2}}{T_2 p + 1}$ — передаточная функция второго фильтра, где

$$T_2 = \frac{1}{\pi \Delta f_2} = \frac{1}{3,14 \cdot 20} = 0,016 \text{ сек.}$$

5. $W_{дв}(p) = \frac{\theta(p)}{U_{\phi 2}(p)} = \frac{k_{дв}}{p(T_{дв}p + 1)}$ — передаточная функция двигателя, где

$$k_{дв} = \frac{\dot{\theta}_{х. х.}}{U_{х. х.}} = \frac{n_{х. х.} \pi}{60 \cdot U_{х. х.}} = \frac{3000 \cdot 3,14}{60 \cdot 30} = 10,5 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1},$$

$$T_{дв} = 0,04 \text{ сек.}$$

6. $W_{ред}(p) = k_{ред}$ — передаточная функция редуктора, $k_{ред} = 10^{-3}$.

7. $W_c(p) = \frac{\Delta C_1(p)}{\Delta \alpha(p)}$ — передаточная функция, характеризующая изменение емкости C_1 при повороте его оси. В соответствии с заданием, эта характеристика линейна. Крутизна характеристики

$$k_c = 80 \frac{n\phi}{\text{рад}} = 8 \cdot 10^{-11} \phi.$$

8. $W_{\kappa 2}(p) = \frac{\Delta \omega_0(p)}{\Delta C_1(p)}$ — передаточная функция, характеризующая изменение резонансной частоты при изменении емкости C_1 . Для того чтобы определить ее при допущениях, сделанных в пункте «1», продифференцируем выражение (2) по C . В результате получим

$$\frac{\partial U_2}{\partial C_1} = U_1' \frac{R^2 L^2 \omega_0^3 (1 - \omega_0^2 C L)}{[R^2 (1 - \omega_0^2 L C)^2 + \omega_0^2 L^2]^{3/2}} \varepsilon / \phi. \quad (5)$$

Разделив (5) на (3), найдем

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial C_1} = \frac{L \omega_0^3}{1 + \omega_0^2 L C} \phi^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (9)$$

Следовательно, считая контур безынерционным, получим

$$W_{\kappa 2}(p) = k_{\kappa 2}(\omega).$$

Если задающая частота f_0 меняется в пределах $\pm 10\%$ от $f_0 = 10^4$ гц, то

$$k_{\kappa 2}(\omega) = \begin{pmatrix} 6,3 & +1,15 \\ & -1,1 \end{pmatrix} \cdot 10^{13} \phi^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Таким образом, передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_{\omega}(p) = \frac{k_{\kappa 1}(\omega) k_y k_{\phi 1} k_{\phi 2} k_{\text{дв}} k_{\text{ред}} k_C k_{\kappa 2}(\omega)}{p(T_{1p} + 1)(T_{2p} + 1)(T_{\text{дв}p} + 1)}. \quad (7)$$

Подставляя числовые значения для частот f_0 , $f_0 + 0,1f_0$ и $f_0 - 0,1f_0$, получим

$$f = f_0, \quad W_{\omega}(p) = 0, \quad (8)$$

$$f = f_0 + 0,1f_0, \quad W_{\omega}(p) = \frac{2,28 \cdot 10^{-6} k_y}{p(3,2 \cdot 10^{-4} p + 1)(0,016 p + 1)(0,04 p + 1)}, \quad (9)$$

$$f = f_0 - 0,1f_0, \quad W_{\omega} = \frac{2,08 \cdot 10^{-6} k_y}{p(3,2 \cdot 10^{-4} p + 1)(0,016 p + 1)(0,04 p + 1)}. \quad (10)$$

Найдем теперь передаточную функцию, если в качестве регулируемой величины рассматривается емкость C_1 .

Структурная схема такой системы имеет вид, представленный на рис. 327. Входящие в эту систему передаточные функции $W_y(p)$, $W_{\phi 1}(p)$, $W_{\text{дв}}(p)$, $W_{\text{ред}}(p)$ и $W_c(p)$ точно такие же, как и в предыдущем случае.

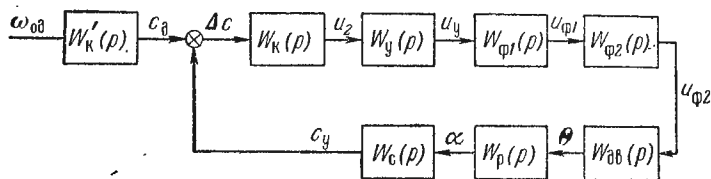


Рис. 327. Структурная схема автоматической системы подстройки частоты с регулируемой величиной C_1 .

Передаточная функция $W_K(p) = \frac{\Delta U_2(p)}{\Delta C(p)}$ характеризует нарастание напряжения U_2 на выходе резонансного контура при изменении емкости C . При сделанных ранее замечаниях о характере выпрямления сигнала на выходе усилителя можно считать, что

$$W_K(p) = k_K(\omega), \quad (11)$$

где $k_K(\omega)$ — коэффициент, вычисляемый по формуле (5).

В случае настройки контура в резонанс $k_K(\omega) = 0$.

При $f = f_0 + 0,1f_0$ $k_K(\omega) = -4,2 \cdot 10^7$ в/ф,

при $f = f_0 - 0,9f_0$ $k_K(\omega) = +3,6 \cdot 10^7$ в/ф.

Таким образом, передаточная функция разомкнутой системы, охваченной обратной связью, имеет следующие значения:

$$\text{при } f = f_0 \quad W_C(p) = 0, \quad (12)$$

$$\text{при } f = f_0 + 0,1f_0 \quad W_C(p) =$$

$$= \frac{-2,28 \cdot 10^{-6} k_y}{(3,2 \cdot 10^{-4} p + 1)(0,016 p + 1)(0,04 p + 1)}, \quad (13)$$

$$\text{при } f = f_0 - 0,1f_0 \quad W_C(p) =$$

$$= \frac{2,08 \cdot k_y}{(3,2 \cdot 10^{-4} p + 1)(0,016 p + 1)(0,04 p + 1)}. \quad (14)$$

Как видно из выражений (9), (10), (13) и (14), передаточные функции не зависят от выбора регулируемой величины. Формально это вытекает из того, что

$$k_{k1}(\omega) \cdot k_{k2}(\omega) = \frac{\partial U_2}{\partial \omega_0} \cdot \frac{\partial \omega_0}{\partial C_1} = k_k(\omega) = \frac{\partial U_2}{\partial C_1} \text{ в/ф.}$$

Перед замкнутым контуром системы необходимо включить элемент, характеризующий изменение величины емкости при резонансе от частоты f_0 входного сигнала. Он может быть представлен безынерционным звеном с коэффициентом передачи

$$k'_k(\omega) = \frac{\partial C}{\partial \omega_0} = \frac{1 + \omega^2 LC}{L\omega_0^3} \text{ ф} \cdot \text{сек.}$$

При f_0 и $f_0 \pm 10\%$ величина

$$k'_k(\omega) = \begin{cases} 1,34 \cdot 10^{-14} \text{ ф} \cdot \text{сек} & \text{при } f = f_0 + 0,1f_0, \\ 1,62 \cdot 10^{-14} \text{ ф} \cdot \text{сек} & \text{при } f = f_0, \\ 1,92 \cdot 10^{-14} \text{ ф} \cdot \text{сек} & \text{при } f = f_0 - 0,1f_0. \end{cases}$$

461. Составить структурную схему и определить передаточную функцию самонастраивающейся системы

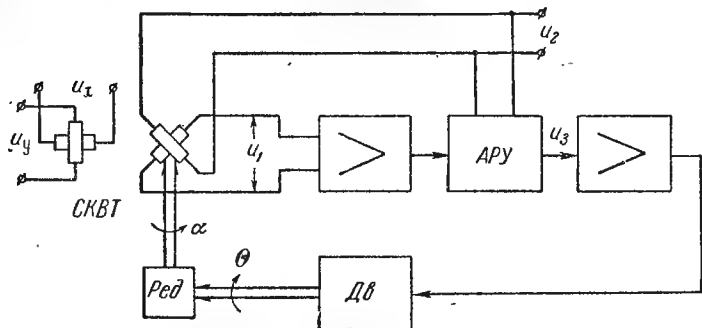


Рис. 328. Автоматическая самонастраивающаяся система построения вектора по двум составляющим.

построения вектора по двум составляющим (рис. 328). Составляющие вектора задаются в виде переменных напряжений U_x и U_y , прикладываемых к обмоткам ста-

k'_{py} равным $\frac{k_{py}}{U_1}$, то получим

$$W(p) = \frac{k}{p(T_y p + 1)(T_{дв} p + 1)},$$

где $k = k_{чз} k'_{py} k_y k_{дв} k_p$.

462. В системе, рассмотренной в задаче 460, определить коэффициент усиления k_y усилителя, обеспечивающий устойчивость управления в пределах отклонения частоты f_0 на $\pm 20\%$.

Ответ. $k_y < 1,71 \cdot 10^7$.

463. В системе, рассмотренной в задаче 461, найти значение коэффициента k'_{py} , обеспечивающего устойчивую работу системы при следующих исходных данных: $k_{чз} = 0,5$, $k_y = 10^4$, $k_{дв} = 12 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$, $k_p = 1,3 \cdot 10^{-3}$, $T_y = 0,025 \text{ сек}$, $T_{дв} = 0,045 \text{ сек}$.

Ответ. $k'_{py} < 0,8$.

464. Найти передаточную функцию $\Phi(p)$ замкнутой самонастраивающейся системы с эталонным фильтром $\Phi_0(p)$, структурная схема которой изображена

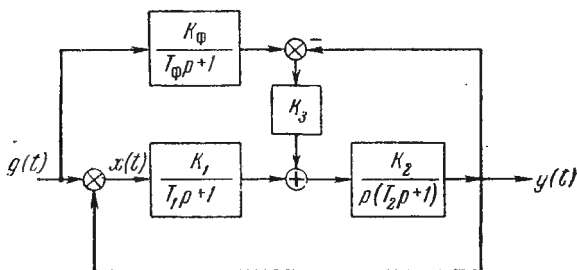


Рис. 330. Структурная схема самонастраивающейся системы с эталонным фильтром.

на рис. 330. Определить, будет ли система устойчива при следующих числовых значениях, входящих в передаточные функции величин $k_\phi = k_2 = k_1 = 1$, $k_3 = 100 \text{ сек}^{-1}$, $T_\phi = 0,04 \text{ сек}$, $T_1 = 0,001 \text{ сек}$, $T_2 = 0,2 \text{ сек}$.

Ответ.

$$\Phi(p) = \frac{k_2 k_1 (T_{\phi} p + 1) + k_{\phi} k_3 k_2 (T_1 p + 1)}{(T_{\phi} p + 1) [p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) + k_3 k_2 (T_1 p + 1) + k_1 k_2]}.$$

Если учесть, что k_3 много больше других членов, то можно записать

$$\Phi(p) \approx \frac{k_{\phi}}{T_{\phi} p + 1} = \Phi_0(p).$$

При заданных значениях величин система устойчива.

465. Система, рассмотренная в предыдущей задаче, предназначена для сохранения качества регулирования при изменении передаточной функции выходного элемента ($W(p) = \frac{k_2}{p(T_2 p + 1)}$) и значений входящих в нее величин. Определить, при каком предельном значении k_2 система будет устойчива. Для сравнения найти также предельный коэффициент k'_2 в случае отсутствия контура самонастройки ($k_3 = k_{\phi} = 0$).

Ответ. $k_2 < 2140 \text{ сдк}^{-1}$, $k'_2 < 1005 \text{ сек}^{-1}$.

§ 19.2. Качество систем экстремального управления,

466. В системе автоматической подстройки частоты, структурная схема которой представлена на рис. 327, найти переходный процесс, пренебрегая постоянными времени фильтров T_1 и T_2 . При расчете принять следующие значения входящих величин $T_{\text{дв}} = 0,04 \text{ сек}$, $k_{\text{дв}} = 10,5 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$, $k_{\phi 1} = k_{\phi 2} = 0,8$, $k_y = 10^7$, $k_{\text{ред}} = 10^{-3}$, $k_c = 8 \cdot 10^{-11} \text{ ф}$. Коэффициент $k_k(\omega)$ рассчитать по формуле

$$k_k(\omega) = \frac{\partial U_2}{\partial C} = U_1 \frac{R^2 L^2 \omega_0^3 (1 - \omega_0^2 C L)}{[R^2 (1 - \omega_0^2 C L)^2 + \omega_0^2 L^2]^{3/2}} \text{ в/ф},$$

при $R = 1000 \text{ ом}$, $U_1 = 100 \text{ в}$, $C = 500 \text{ нф}$, $L = 0,5 \text{ гн}$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,28 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$.

Начальное отклонение от резонансной частоты составляет $0,2 \omega_0$ при частоте ω_0 , равной резонансной частоте. Внешние возмущения отсутствуют. Начальная скорость изменения частоты равна нулю.

Решение. Структурная схема системы при сделанных допущениях имеет вид, представленный на рис. 331. Здесь

$$k = k_{\phi 1} k_{\phi 2} k_y k_c k_{дв} k_{ред} = 5,35 \cdot 10^{-6} \text{ ф/в.}$$

Дифференциальные уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned} p(T_{дв}p + 1)C_y &= kU_2, \\ U_2 &= k_k(\omega)(C_d - C_y). \end{aligned}$$

Разрешая эту систему, получим

$$T_{дв} \frac{d^2 C_y}{dt^2} + \frac{dC_y}{dt} = k k_k(\omega)(C_d - C_y). \quad (1)$$

Так как при заданных числовых значениях вблизи резонанса первый член знаменателя производной $\frac{\partial U_2}{\partial C}$

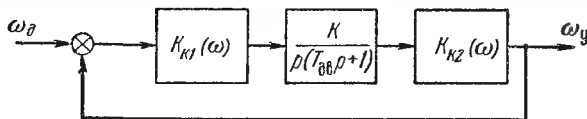


Рис. 331. Структурная схема упрощенной автоматической системы подстройки частоты.

значительно меньше второго, то можно написать

$$k_k(\omega) \approx \frac{U_1 R^2}{L} (1 - \omega_0^2 C L). \quad (2)$$

В формуле (1) C_y представляет собой суммарную емкость $C_y = C_0 + C_2$. Для исследования же устойчивости важно знать отклонение ее от резонансного значения $C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}$. Учитывая это, можно записать

$$k_k(\omega) = \frac{U_1 R^2}{L} [1 - \omega_0^2 (C_0 + C_2) L] = U_1 R^2 \omega_0^2 C_2.$$

Подставляя это в уравнение (1), получим

$$T_{дв} \frac{d^2 C_2}{dt^2} + \frac{dC_2}{dt} + k U_1 R^2 \omega_0^2 C_y C_2 = k U_1 R^2 \omega_0^2 C_d C_2.$$

Малость отклонений C_2 от резонанса позволяет линеаризовать это уравнение по C_2 :

$$T_{\text{лв}} \frac{d^2 C_2}{dt^2} + \frac{dC_2}{dt} + kU_1 R^2 \omega_0^2 C_0 C_2 = kU_1 R^2 \omega_0^2 C_0 C_{\text{д}}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$0,04 \frac{d^2 C_2}{dt^2} + \frac{dC_2}{dt} + 2,13 C_2 = 2,13 C_{\text{д}}.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = 12,5 \pm j \sqrt{28,2} = -12,5 \pm j5,3.$$

Следовательно, общее решение

$$C_2 = D_1 e^{(-12,5 + j5,3)t} + D_2 e^{(-12,5 - j5,3)t}. \quad (3)$$

Для нахождения постоянных интегрирования найдем, как изменится емкость C при изменении частоты ω на 20% ω_0 .

Воспользуемся для этого выражением (2), считая, что изменение частоты ω должно компенсироваться изменением емкости. В соответствии с этим можно записать

$$\frac{U_1 R^2}{L} [1 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2 C_0 L] = \frac{U_1 R^2}{L} [1 - \omega_0^2 (C_0 + \Delta C) L].$$

Отсюда следует

$$\Delta C = 2 \frac{C_0}{\omega_0} \Delta\omega.$$

Если $\Delta\omega = 0,2\omega_0$, то $\Delta C = 0,4C_0 = 200 \text{ нф}$.

Подставляя начальные условия $C_{20} = 200 \text{ нф}$ и $C_{20} = 0$ в (3), получим

$$C_2 = 200 [1 - e^{-12,5t} (\cos 5,3t + 2,36 \sin 5,3t)].$$

467. Найти переходный процесс в экстремальной системе стабилизации угловым положением спутника, блок-схема которой изображена на рис. 332.

Уравнения, описывающие динамику работы системы, следующие:

1. Уравнение спутника

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M.$$

2. Уравнение стабилизирующего двигателя с маховиком

$$M = k_M U_2.$$

3. Уравнение логического звена

$$U_2 = k_2 U_1 \operatorname{sign} \frac{d\theta}{dt}.$$

4. Уравнение экстремальной характеристики

$$U_1 = -k_1 \theta^2.$$

Исходные данные для расчета: $J = 100 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2$, $k_1 = 60 \text{ в/рад}^2$, $k_2 = 100$, $k_M = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{в}^{-1}$, начальные отклонения $\theta_0 = 10^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 15 \text{ град/сек}$.

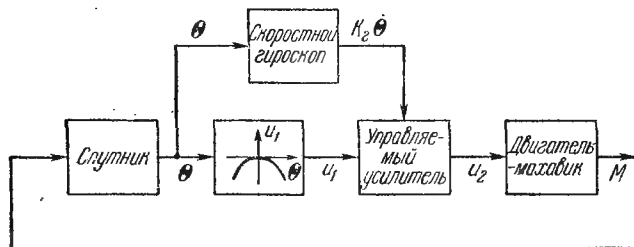


Рис. 332. Блок-схема экстремальной системы стабилизации спутника.

У к а з а н и е. Общее уравнение линеаризовать в точке $\theta = 15^\circ$.

Ответ. $\theta = 29^\circ \sin(0,56t + 20^\circ 30')$.

468. Найти переходный процесс и построить его фазовый портрет в системе, рассмотренной в задаче 467, если уравнение логического звена имеет вид

$$U_2 = k_2 U_1 \operatorname{sign} \dot{\theta} - k_3 \dot{\theta},$$

$k_3 = 4,3 \cdot 10^3 \text{ в} \cdot \text{сек}$. Остальные исходные данные и допущения принять равными приведенным в задаче 467.

Ответ. $\theta = 29^\circ e^{-0,056t} \sin(0,558t + 20^\circ 30')$.

Фазовый портрет изображен на рис. 333.

469. Определить потери на поиск в системе автоматической подстройки частоты, рассмотренной в задаче

460. В основу исследования положить структурную схему, изображенную на рис. 326. За исходные данные для расчета принять: $k_y = 10^7$, $k_{\phi 1} = k_{\phi 2} = 0,8$, $k_{ред} = 10^{-3}$, $k_c = 8 \cdot 10^{-11}$ ф, $k_{дв} = 10,5 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$, $T_{дв} = 0,04 \text{ сек}$, $T_{\phi 2} = 0,016 \text{ сек}$, $T_{\phi 1} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$, $R = 1000 \text{ ом}$, $C_1 = 400 \text{ нф}$, $C_2 = C_{20} + C_{2m} \sin \omega_1 t = 100 + 50 \sin 40t \text{ нф}$, $L = 0,5 \text{ гц}$, $\omega_0 = 6,28 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$.

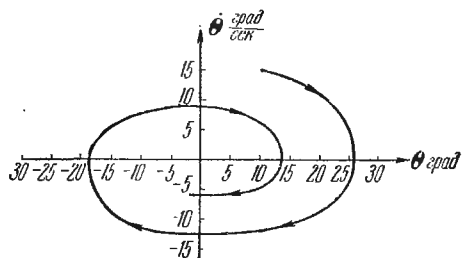


Рис. 333. Фазовый портрет переходного процесса стабилизации углового положения спутника.

Решение. Под потерями на поиск понимается средняя ошибка $\bar{x}(t)$, возникающая в экстремальной системе в установившемся режиме, в результате поискового движения. Если $F(y)$ представляет собой функциональную зависимость, характеризующую экстремальные свойства некоторого элемента при изменении регулируемой величины y , то потери на поиск

$$\overline{F - F_э} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{dy^2} \overline{x^2(t)},$$

где $F_э$ — экстремальное значение.

При синусоидальном поиске с амплитудой A_1

$$\overline{x^2} = \frac{A_1^2}{2}.$$

Рассмотрим потери на поиск, принимая за регулируемую величину емкость $C_d = C_{20} + C_1$. Применительно к этому потери на поиск

$$\overline{C_d - C_{д0}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} (\Delta C)^2, \quad (1)$$

где $k = k_y k_{\phi 1} k_{\phi 2} k_{дв} k_p k_C = 5,35 \cdot 10^{-6}$ ф/в — общий коэффициент передачи без резонансного контура с передаточной функцией $W_{к2}(p) = \frac{\partial U_2}{\partial C} = k_{к2}(\omega_0)$.

Вторую производную $\frac{\partial^2 U}{\partial C^2}$ найдем дифференцированием выражения $\frac{\partial U}{\partial C}$, приведенного в задаче 460,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} &= \\ &= \frac{U_1 R^2 L^3 \omega^5 \{ -[R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 L^2]^3/2 + 3R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 [R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 L^2]^{1/2} \}}{[R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 L^2]^3} = \\ &= \frac{U_1 R^2 L^3 \omega^5 \{ -[R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 L^2] + 3R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 \}}{[R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 L^2]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Расчет по этой формуле дает

$$\frac{\partial^2 U}{\partial C^2} = 4 \cdot 10^5 \text{ в/ф}^2. \quad (2)$$

Амплитуду ошибки ΔC можно найти по формуле

$$\Delta C_{1m} = |\Phi_x(j\omega)|_{\omega=\omega_1} \cdot C_{2m} = \left| \frac{1}{1 + W(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_1} \cdot C_{2m}, \quad (3)$$

где

$$W(j\omega) = \frac{k k_{к2}(\omega_0)}{p(T_{дв}p + 1)(T_{\phi 1}p + 1)(T_{\phi 2}p + 1)} \quad \text{при } p = j\omega_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Phi_x(j\omega)|_{\omega=\omega_1} &= \omega_1 [(T_{дв}^2 \omega_1^2 + 1)(T_{\phi 1}^2 \omega_1^2 + 1)(T_{\phi 2}^2 \omega_1^2 + 1)]^{1/2} \times \\ &\times \{ [k k_{к2}(\omega_0) + T_{дв} T_{\phi 1} T_{\phi 2} \omega_1^4 - (T_{дв} + T_{\phi 1} + T_{\phi 2}) \omega_1^2]^2 + \\ &+ \omega_1^2 [1 - \omega_1^2 (T_{дв} T_{\phi 1} + T_{дв} T_{\phi 2} + T_{\phi 1} T_{\phi 2})]^2 \}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения с линеаризацией члена $k_{к2}(\omega_0)$ в точке, соответствующей отклонению емкости C на 25 нф от резонансной (на половине амплитуды C_{2m}), получим

$$|\Phi_x(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = 0,98.$$

Подставляя это выражение в (3), имеем

$$\Delta C_{1m} = 0,98 C_{2m} = 0,98 \cdot 50 = 49 \text{ нф} = 4,9 \cdot 10^{-11} \text{ ф}.$$

Таким образом, потери на поиск по емкости равны

$$C_{\pi} - C_{\pi 0} = \frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} \cdot \frac{(\Delta C_{1m})^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} 5,35 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot (4,9)^2 \cdot 10^{-22} = 1,28 \cdot 10^{-21} \phi.$$

470. На вход следящей системы, изображенной на рис. 334, поступает управляющий сигнал $u_g(t)$ и

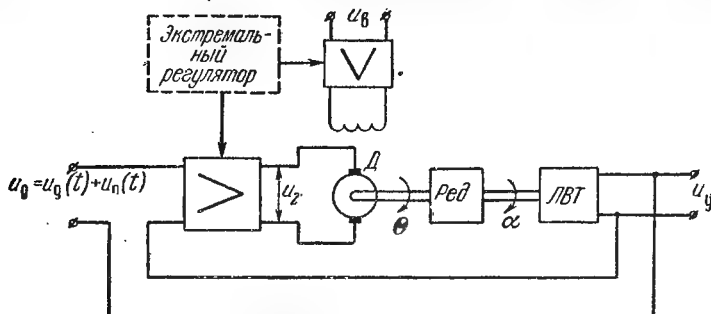


Рис. 334. Следящая система, самонастраивающаяся на минимум квадратичной ошибки.

случайная помеха $u_n(t)$, представляющая «белый шум» со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N = \text{const}$. Система самонастройки, воздействующая на коэффициенты усиления усилителей в цепи якоря (k_{y1}) и в цепи возбуждения (k_{y2}) двигателя Д, обеспечивает минимум общей квадратической ошибки на выходе. Необходимо определить функциональные зависимости коэффициентов усиления k_{y1} и k_{y2} от скорости изменения входного сигнала при установившемся режиме работы и изобразить структурную схему с самонастройкой. Коэффициент демпфирования системы ξ должен быть равен 0,5.

Система уравнений, описывающих динамику работы системы без самонастройки, имеет вид

$$u_2 = k_{y1}(u_g - u_y), \quad L_\pi \frac{di_\pi}{dt} + i_\pi r = u_2 - c_e \frac{d\theta}{dt},$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{\text{дв}} - M_{\text{дв}} = c_m i_\pi,$$

$$\alpha = k_{\text{ред}} \theta, \quad u_y = k_{\text{вт}} \alpha, \quad c_e = u_{\text{в}} k_{y2}.$$

Числовые данные для расчета: $J = 0,2 \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$,
 $c_m = 70 \text{ Г} \cdot \text{см}/\text{а}$, $r = 2 \text{ ом}$, $u_b = 30 \text{ в}$, $k_p = 10^{-4}$, $k_{\text{лвт}} =$
 $= 0,5 \text{ в/град}$, $N = 0,01 \text{ в}^2$.

Решение. После приведения подобных членов и упрощения уравнений получим передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)p}, \quad (1)$$

где
$$T = \frac{Jr}{c_m u_b k_{y2}} = \frac{0,4}{210 k_{y2}} \text{ сек},$$

$$k = \frac{k_{y1} k_p k_{\text{лвт}}}{k_{y2} u_b} = 9,6 \cdot 10^{-5} \frac{k_{y1}}{k_{y2}} \text{ сек}^{-1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки равна

$$\Phi_x(p) = \frac{p(Tp + 1)}{p(Tp + 1) + k}. \quad (2)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{1}{\frac{T}{k} p^2 + \frac{1}{k} p + 1}. \quad (3)$$

Поскольку коэффициент демпфирования задан, то

$$\frac{1}{k} = 2\xi \sqrt{\frac{T}{k}}. \quad (4)$$

Управляющий сигнал $u_g(t) = \dot{u}t$ и помеха $u_n(t)$ некоррелированы. Поэтому квадратичная ошибка $\epsilon_u^2 = \epsilon_g^2 + \epsilon_n^2$, где ϵ_d^2 — квадрат ошибки от управляющего сигнала $u_g(t)$ и ϵ_n^2 — дисперсия на выходе от помехи.

С помощью коэффициентов ошибок в типовых режимах находим

$$\epsilon_g^2 = \frac{\dot{u}^2}{k^2}.$$

Дисперсия от помехи

$$\begin{aligned} \epsilon_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(j\omega)|^2 s_n(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{\left| \frac{T}{k} (j\omega)^2 + \frac{1}{k} (j\omega) + 1 \right|^2} d\omega = \frac{Nk}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon_u^2 = \frac{\dot{u}^2}{k^2} + \frac{Nk}{2} = \frac{\dot{u}^2 k_{y2}^2}{(9,6 \cdot 10^{-5})^2 k_{y1}^2} + \frac{Nk_{y1} \cdot 9,6 \cdot 10^{-5}}{2k_{y2}}.$$

Дифференцируя это выражение по k_{y1} и k_{y2} , получим условие минимума квадратичной ошибки

$$\left[\frac{2\dot{u}^2 k_{y2}}{(9,6 \cdot 10^{-5})^2 k_{y1}^3} - \frac{N \cdot 9,6 \cdot 10^{-5}}{2k_{y2}^2} \right] (k_{y1} - k_{y2}) = 0. \quad (5)$$

Второе уравнение для определения k_{y1} и k_{y2} получается из (4) в результате подстановки значения k и возведения в квадрат

$$9,6 \cdot 10^{-5} \frac{k_{y1}}{k_{y2}} = \frac{1}{4\xi^2 T} = \frac{c_M u_B k_{y2}}{4\xi^2 J r}.$$

После подстановки численных значений получаем

$$9,6 \cdot 10^{-5} \frac{k_{y1}}{k_{y2}} = 5250 k_{y2}. \quad (6)$$

В результате совместного решения уравнений (5) и (6) находим заданные функциональные зависимости

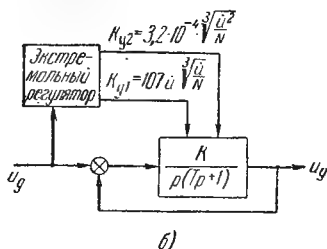
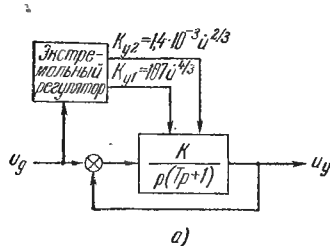


Рис. 335. Структурные схемы самонастраивающейся системы: а) с измерителем скорости входного сигнала; б) с измерителем скорости входного сигнала и спектральной плотности шумов.

оптимальных значений коэффициентов $k_{y1}^{\text{опт}}$ и $k_{y2}^{\text{опт}}$ от скорости изменения входного сигнала

$$k_{y2}^{\text{опт}} = 1,4 \cdot 10^{-3} \dot{u}^{2/3} \text{ сек}, \quad (7)$$

$$k_{y1}^{\text{опт}} = 107 \dot{u}^{4/3}. \quad (8)$$

Таким образом, для оптимального регулирования с минимумом квадратичной ошибки ϵ_u^2 при заданной спектральной плотности N помехи в виде «белого» шума и переменной скорости $\dot{u}$ входного сигнала, экстремальная система должна содержать измерительное устройство $\dot{u}$ и автоматические регуляторы усиления в усилителях U_1 и U_2 , реализующие зависимости (7) и (8). Структурная схема такой системы представлена на рис. 335, а. Если измеряется и спектральная плотность N шумов, то оптимальные коэффициенты усиления $k_{y1}^{\text{опт}}$ и $k_{y2}^{\text{опт}}$ должны регулироваться в соответствии с выражениями

$$k_{y2}^{\text{опт}} = 3,02 \cdot 10^{-4} \sqrt[3]{\frac{\dot{u}^2}{N}},$$

$$k_{y1}^{\text{опт}} = 23,2 \cdot \dot{u} \sqrt[3]{\frac{\dot{u}}{N}}.$$

Структурная схема системы представлена на рис. 335, б.

СОСТАВЛЕНИЕ СХЕМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА НЕПРЕРЫВНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

§ 20.1. Составление схем для моделирования элементов автоматических систем на электронных вычислительных машинах

471. Составить схему модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, если параметры якоря: индуктивность $L_{\text{я}} = 0,1 \text{ гн}$, сопротивление $R_{\text{я}} = 10 \text{ ом}$; скорость холостого хода при $u_{\text{вх}} = 24 \text{ в}$ $n_{\text{х.х}} = 3600 \text{ об/мин}$, пусковой момент $M_{\text{п}} = 2 \text{ кг} \cdot \text{см}$, момент инерции $J = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$ и напряжение входного сигнала $u_{\text{вх}} \leq 24 \text{ в}$. В качестве выходной величины двигателя принять угловую скорость Ω . Влиянием сил сухого трения пренебречь; не учитывать индуктивность и внутреннее сопротивление оконечного каскада усилителя, питающего двигатель.

Решение. Воспользуемся уравнением двигателя

$$(T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1) \Omega(t) = k_{\text{д}} u_{\text{вх}}(t), \quad (1)$$

полученным в задаче 15. Найдем постоянные времени $T_{\text{я}}$, $T_{\text{м}}$ и коэффициент передачи $k_{\text{д}}$. $T_{\text{я}} = L_{\text{я}} R_{\text{я}}^{-1} = 0,1 \cdot 10^{-1} = 0,01 \text{ сек}$;

$$\Omega_{\text{х.х}} = \pi n_{\text{х.х}} 30^{-1} = 3,14 \cdot 3600 \cdot 30^{-1} = 377 \text{ сек}^{-1};$$

$$T_{\text{м}} = J \Omega_{\text{х.х}} M_{\text{п}}^{-1} = 1,06 \cdot 10^{-3} \cdot 377 \cdot 2^{-1} = 0,2 \text{ сек};$$

$$k_{\text{д}} = \Omega_{\text{х.х}}^0 (u_{\text{вх}}^0)^{-1} = 377 \cdot 24^{-1} = 15,7 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Подставляя найденные параметры в (1), получим уравнение движения двигателя

$$(0,002p^2 + 0,2p + 1)\Omega(t) = 15,7u_{\text{вх}}(t). \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) принадлежит аperiodическому звену второго порядка, схема модели которого приведена в приложении 33.

Для перехода к переменным модели воспользуемся уравнениями преобразования переменных:

$$\left. \begin{aligned} \Omega(t) &= m_{\Omega} u_2, \\ u_{\text{вх}}(t) &= m_u u_1, \\ t &= m_t t_m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где m_{Ω} — масштаб представления угловой скорости двигателя в модели в виде напряжения u_2 ; m_u — масштабный коэффициент представления входной величины двигателя $u_{\text{вх}}$ в виде входной величины модели u_1 , m_t — масштаб времени, t_m — независимая переменная модели (или машинное время) и t — натуральное время.

Выберем натуральный масштаб времени, т. е. $m_t = 1$. Для большинства операционных усилителей непрерывных вычислительных машин линейный диапазон изменения напряжений равен ± 100 в. Поэтому при решении задачи выходные напряжения операционных усилителей не должны превышать 100 в. Однако меньшая погрешность решения обеспечивается, когда моделирование происходит при наибольшем допустимом уровне напряжений, что также необходимо учитывать при выборе масштабных коэффициентов модели. Исходя из этого, выбираем

$$\begin{aligned} m_{\Omega} &= \frac{\Omega_{\text{х.к}}}{100} = \frac{377}{100} = 3,77 \text{ в}^{-1} \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}, \\ m_u &= \frac{u_{\text{вх макс}}}{100} = \frac{24}{100} = 0,24. \end{aligned} \quad (4)$$

Для перехода к машинным переменным подставим (3) в (1), в результате чего получим уравнение модели в общем виде

$$(T_d T_m p^2 + T_m p + 1) u_2(t) = k_d \frac{m_u}{m_{\Omega}} u_1(t). \quad (5)$$

или

$$(0,002p^2 + 0,2p + 1)u_2(t) = u_1(t). \quad (6)$$

Для определения числовых значений сопротивлений и емкостей резисторов и конденсаторов модели, воспользуемся формулами приложения 33, откуда следует

$$k = \frac{R_4 R_3}{R_1 R_6} = 1, \quad T_2^2 = \frac{R_4 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_6} = 0,002 \text{ сек}^2,$$

$$T_1 = \frac{R_4 R_2 R_3 C_1}{R_5 R_6} = 0,2 \text{ сек.}$$

При выборе $R_1 = R_3 = 100 \text{ ком}$, $R_2 = 20 \text{ ком}$, $R_4 = R_6 = 1 \text{ мом}$, $R_5 = 10 \text{ ком}$ и $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкф}$ схема модели (п. 5 приложения 33) будет соответствовать двигателю постоянного тока с независимым возбуждением с параметрами, заданными в условии задачи.

472. Составить схему модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и с параметрами,

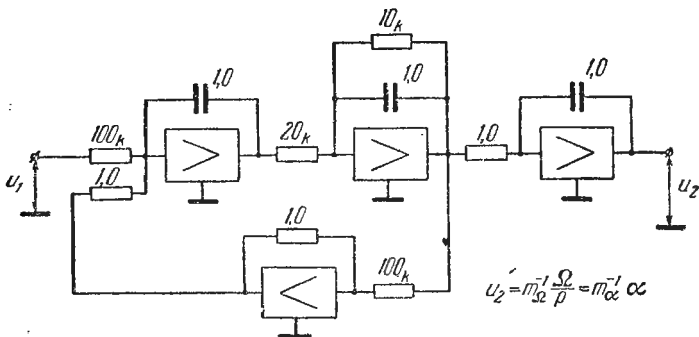


Рис. 336. Схема модели двигателя.

заданными в условии предыдущей задачи, но в качестве выходной величины принять не скорость Ω , а угол поворота вала двигателя α . Влиянием сил сухого трения пренебречь.

Ответ. См. рис. 336, где $m_{\alpha} = k^{-1} \cdot m_{\Omega} = 3,77 \text{ в}^{-1} \cdot \text{рад}$ — масштабный коэффициент по углу α . Здесь $k = 1 \text{ сек}^{-1}$ — коэффициент передачи интегратора.

473. Составить схему модели двигателя с независимым возбуждением по условиям задачи 471, но с учетом влияния момента нагрузки от сил сухого трения $M_H = M_H^0 \text{sign } \Omega$ (рис. 337, б), причем $M_H^0 = 0,4 \text{ кг} \cdot \text{см}$.

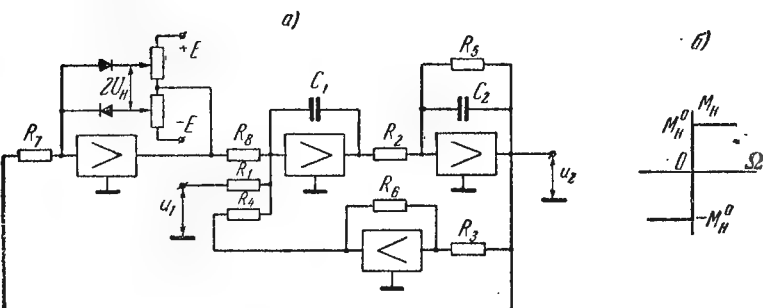


Рис. 337. Схема модели к задаче 473.

Решение. Составим уравнение равновесия напряжений цепи якоря

$$u_{\text{вх}} = R_{\text{я}} i_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + c_e \Omega \quad (1)$$

и уравнение равновесия моментов на валу двигателя

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M - M_H = c_m i_{\text{я}} - M_H^0 \text{sign } \Omega. \quad (2)$$

Решив их совместно относительно угловой скорости Ω , получим уравнение движения двигателя с учетом момента нагрузки M_H

$$(T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1) \Omega = k_{\text{д}} u_{\text{вх}} - k_{\text{м}} M_H^0 \text{sign } \Omega, \quad (3)$$

где $k_{\text{д}} = \frac{1}{c_e} = \frac{\Omega_{\text{х. х}}^0}{U_{\text{вх}}^0}$, $k_{\text{м}} = \frac{R_{\text{я}}}{c_e c_{\text{м}}} = \frac{\Omega_{\text{х. х}}}{M_{\text{п}}} = \beta$ — коэффициенты передачи двигателя по напряжению ($k_{\text{д}}$) и по моменту нагрузки ($k_{\text{м}}$). Коэффициенты $c_{\text{м}}$, $c_{\text{я}}$, β , $T_{\text{я}}$, $T_{\text{м}}$ определены в задаче 15.

Моделирование статической характеристики сухого трения (рис. 337, б) производится по схеме п. 2 приложения 34. При этом величина напряжения $U_3 = U_4 = U_H$

подбирается такой, чтобы диоды были надежно закрыты. Выберем $U_H = 20$ в. Тогда масштабный коэффициент

$$m_m = \frac{M_H^0}{U_H} = \frac{0,4}{20} = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (4)$$

Для перехода к машинным переменным воспользуемся масштабными коэффициентами, полученными в задаче 471, m_Ω , m_u ($m_t = 1$) и коэффициентом m_m (4). После замены переменных уравнение (3) принимает вид

$$(T_{\text{я}} T_m p^2 + T_m p + 1) u_2(t) = k u_1(t) - k_1 U_H \text{sign } u_2, \quad (5)$$

где $k = k_d \frac{m_u}{m_\Omega} = 15,7 \cdot \frac{0,24}{3,77} = 1$, $k_1 = k_m \frac{m_m}{m_\Omega} = \frac{377}{2} \cdot \frac{0,02}{3,77} = 1$.

Подставив числовые значения в (5), получим уравнение модели

$$(0,002 p^2 + 0,2 p + 1) u_2(t) = u_1(t) - 20 \text{sign } u_2. \quad (6)$$

Уравнение (6) отличается от уравнения (6) задачи 471 дополнительным нелинейным членом $20 \text{sign } u_2$, который реализуется с помощью схемы, изображенной в пп. 1, 2 приложения 34 при $R_0 = \infty$. При этом из уравнений (3) и (6) видно, что действие момента от сил сухого трения равносильно действию нелинейной отрицательной обратной связи. Поэтому схема модели, отображающая дифференциальное уравнение движения двигателя с независимым возбуждением с учетом момента от сил сухого трения принимает вид, изображенный на рис. 337, а. Уравнение модели, записанное с помощью параметров схемы рис. 337, а, принимает вид

$$\left(\frac{R_2 R_3 R_4}{R_6} C_1 C_2 p^2 + \frac{R_2 R_3 R_4}{R_5 R_6} C_1 p + 1 \right) u_2(t) = \\ = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_6} u_1(t) - \frac{R_3 R_4}{R_6 R_8} U_H \text{sign } u_2(t), \quad (7)$$

где $R_8 = 100$ ком, а величины сопротивлений и емкостей резисторов $R_1 - R_6$ и конденсаторов C_1 , C_2 получены в задаче 471. Сопротивление резистора R_7 (рис. 337, а), не вошедшее в уравнение (7), может иметь произвольное конечное значение; но на порядок или несколько порядков превосходящее прямые сопротивления диодов и введенных сопротивлений потенциометров (см. п. 2

приложения 34), включенных в обратную связь операционного усилителя.

474. Составить в общем виде схему модели двигателя с независимым возбуждением с учетом момента нагрузки от сил сухого трения $M_n = M_n^0 \text{sign } \Omega$ (рис. 337, б), если влиянием электромагнитной постоянной времени цепи якоря T_a можно пренебречь. Выходной величиной принять угловую скорость вращения вала Ω , а входной — напряжение $u_{вх}$, подаваемое на обмотку якоря. Все переменные и параметры двигателя с независимым возбуждением определены в предыдущих задачах.

Решение. Уравнение движения двигателя в машинных переменных (см. предыдущую задачу) при $T_a = 0$ принимает вид

$$(T_m p + 1) u_2(t) = k_d \frac{m_u}{m_\Omega} u_1(t) - k_m \frac{m_m}{m_\Omega} U_n \text{sign } u_2(t).$$

Схема модели двигателя, согласно полученному уравнению, приведена на рис. 338. Параметры модели

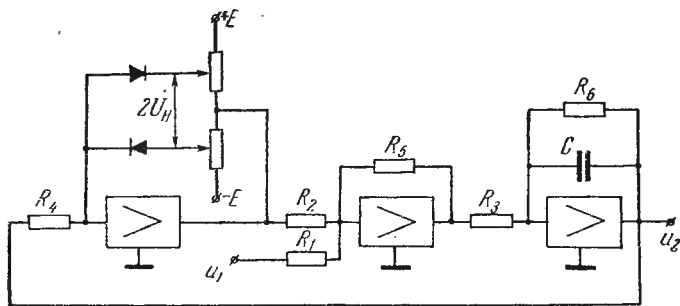


Рис. 338. Схема модели двигателя к задаче 474.

(сопротивления резисторов $R_1 - R_6$ и емкость конденсатора C) определяются на основании следующих формул:

$$CR_6 = T_m, \quad \frac{R_5 R_6}{R_1 R_3} = k_d \frac{m_u}{m_\Omega}, \quad \frac{R_5 R_6}{R_2 R_3} = k_m \frac{m_m}{m_\Omega}.$$

Все масштабные коэффициенты определены при решении предыдущих задач.

475. Найти уравнение модели, схема которой представлена на рис. 339, где напряжение обратной связи u_3

является частью выходного напряжения u_2 и снимается с помощью потенциометра (блока делителя напряжения) R_3 ; $z_0(p)$, $z_1(p)$ — операторные сопротивления.

Решение. Отношение переменного сопротивления R_α , с которого снимается напряжение u_3 , к сопротивлению R_3 , $\frac{R_\alpha}{R_3} = \alpha$, называют коэффициентом делителя напряжения. Тогда

$$u_3 = \alpha u_2. \quad (1)$$

Уравнение модели

$$u_2 = -z_0(p) \left[\frac{1}{z_1(p)} u_1 + \frac{1}{R_2} u_3 \right]. \quad (2)$$

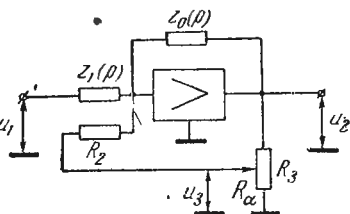


Рис. 339. Схема модели к задаче 475.

После подстановки (1) в (2) и преобразований получим искомое уравнение

$$\left[\frac{R_2}{\alpha z_0(p)} + 1 \right] u_2(t) = -\frac{R_2}{\alpha z_1(p)} u_1(t).$$

476. Составить схему модели гидравлического исполнительного устройства (рис. 2, а), дифференциальное уравнение и передаточная функция которого получены в задаче 2. Параметры гидравлического исполнительного устройства следующие: $k_1 = 50 \text{ сек}^{-1}$, $a = 14 \text{ см}$, $b = 7 \text{ см}$, $c_1 = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}$, $c_2 = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-1}$, $c_3 = 2 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}$.

Решение. Найдем постоянные времени и коэффициенты передачи (см. задачу 2):

$$k_2 = \frac{a}{a+b} = \frac{14}{14+7} = 0,667, \quad k_3 = \frac{b}{a} = \frac{7}{14} = 0,5,$$

$$k_4 = \frac{c_3}{c_2} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ сек};$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{1 + k_1 k_3 k_4} = \frac{50 \cdot 0,667}{1 + 50 \cdot 0,5 \cdot 4} = 0,33 \text{ сек}^{-1},$$

$$T_{0.c} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{0,05}{0,5} = 0,1 \text{ сек},$$

$$T = \frac{T_{0.c}}{1 + k_1 k_3 k_4} = \frac{0,1}{1 + 50 \cdot 0,5 \cdot 4} \approx 0,001 \text{ сек}.$$

Выражение передаточной функции гидравлического исполнительного устройства

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(T_{oc}p + 1)}{p(Tp + 1)}, \quad (1)$$

где $Y(p)$ изображение выходной величины — перемещения заслонки y , $X(p)$ — изображение входной величины — перемещения муфты x .

Представим передаточную функцию (1) в виде произведения

$$W(p) = W_1(p) W_2(p), \quad (2)$$

$$W_1(p) = \frac{pY(p)}{X(p)} = \frac{k(T_{oc}p + 1)}{Tp + 1}, \quad W_2 = \frac{Y(p)}{pY(p)} = \frac{1}{p}. \quad (3)$$

На основании передаточной функции $W_1(p)$ запишем дифференциальное уравнение

$$(Tp + 1)\dot{y}(t) = k(T_{oc}p + 1)x(t), \quad (4)$$

где $\dot{y}(t) = py = \frac{dy}{dt}$. Умножим обе части уравнения (4) на T_{oc} и к левой части прибавим $T\dot{y} - T\dot{y}$

$$T\dot{y} - T\dot{y} + (TT_{oc}p + T_{oc})\dot{y} = k(T_{oc}p + 1)T_{oc}x,$$

$$(T_{oc} - T)\dot{y} + (T_{oc}p + 1)T\dot{y} = k(T_{oc}p + 1)T_{oc}x,$$

$$\dot{y} = k \frac{T_{oc}}{T} x - \frac{\frac{T_{oc}}{T} - 1}{T_{oc}p + 1} \dot{y}.$$

Но $k \frac{T_{oc}}{T} = k_1 k_2$, $\frac{T_{oc}}{T} - 1 = k_1 k_3 k_4$. Тогда

$$\dot{y} = k_1 k_2 x - \frac{k_1 k_3 k_4}{T_{oc}p + 1} \dot{y}. \quad (5)$$

Для перехода к машинным переменным (u_1 , u_2) воспользуемся масштабными коэффициентами (см. задачу 471),

$$\dot{y} = m_{\dot{y}} u_2, \quad x = m_x u_1, \quad t = m_t t_m, \quad m_t = 1. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим

$$u_2 = \frac{m_x}{m_{\dot{y}}} k_1 k_2 u_1 - \frac{k_1 k_3 k_4}{T_{oc}p + 1} u_2. \quad (7)$$

На основании дифференциального уравнения (7) составляем схему модели (рис. 340), уравнение которой имеет вид

$$u_2 = \frac{R_4}{R_1} u_1 - \frac{R_4 R_5}{R_2 R_3 (CR_5 p + 1)} u_2. \quad (8)$$

Из сравнения уравнений (7) и (8) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_4}{R_1} &= \frac{m_x}{m_y} k_1 k_2 = \frac{m_x}{m_y} 50 \cdot 0,667, \\ \frac{R_4 R_5}{R_2 R_3} &= k_1 k_3 k_4 = 50 \cdot 0,5 \cdot 4 = 100, \\ CR_5 &= T_{oc} = 0,1 \text{ сек.} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Выбрав масштабные коэффициенты $m_y = 66,7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, сек^{-1} , $m_x = 10 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, получим

$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{m_x}{m_y} 50 \cdot 0,667 = \frac{10}{66,7} 50 \cdot 0,667 = 5. \quad (10)$$

На основании соотношений (9) и (10) выбираем $R_1 = 20 \text{ ком}$, $R_2 = R_3 = 10 \text{ ком}$, $R_4 = R_5 = 100 \text{ ком}$, $C = 1 \text{ мкф}$.

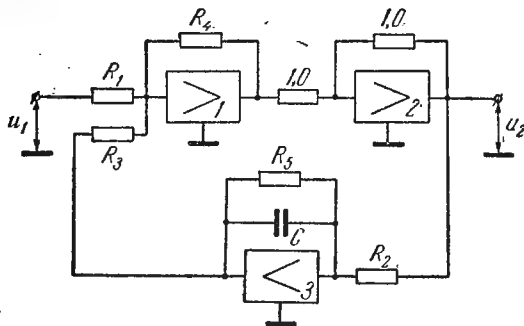


Рис. 340. Схема модели к задаче 476.

Подсоединив к выходу схемы модели, изображенной на рис. 340, интегратор (п. 8 приложения 33) с коэффициентом передачи $k_5 = 1 \text{ сек}^{-1}$, получим искомую

схему модели гидравлического исполнительного устройства.

477. Составить дифференциальное уравнение модели, схема которой изображена на рис. 341, где R — потенциометры, представляющие собой одностипные блоки делителей напряжения с коэффициентами α_1 , α_2 (см. задачу 475). Выходной величиной принять напряжение u_4 , а входной — u_1 .

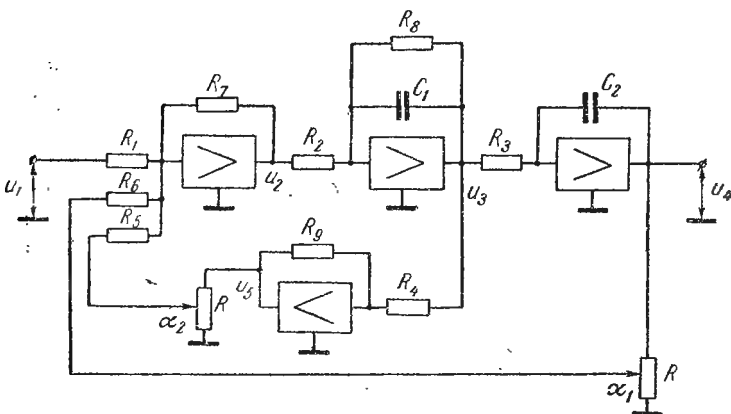


Рис. 341. Схема модели к задаче 477.

Решение. Обозначим выходные напряжения каждого операционного усилителя ($u_1 - u_5$). Составим систему уравнений

$$u_2 = -R_7 \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{\alpha_1 u_4}{R_6} + \frac{\alpha_2 u_5}{R_5} \right), \quad (1)$$

$$u_3 = -\frac{1}{C_1 p} \left(\frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_8} \right), \quad (2)$$

$$u_4 = -\frac{1}{C_2 p} \frac{u_3}{R_8}, \quad (3)$$

$$u_5 = -R_9 \frac{u_3}{R_4}. \quad (4)$$

Исключим переменные u_2 , u_3 , u_5 . Для этого выразим u_3 через u_4 из уравнения (3) и подставим в уравнения

(2) и (4). В результате получим

$$u_2 = C_1 C_2 R_2 R_3 p^2 u_4 + C_2 \frac{R_2 R_3}{R_8} p u_4, \quad u_5 = C_2 \frac{R_3 R_9}{R_4} p u_4.$$

Подставив полученные выражения для u_2 и u_5 в уравнение (1) и сделав преобразования, получим искомое дифференциальное уравнение модели

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) u_4(t) = -b_0 u_1(t),$$

где $a_0 = C_1 C_2 R_2 R_3$, $a_1 = C_2 \left(\frac{R_2 R_3}{R_8} + \frac{a_2 R_3 R_7 R_9}{R_4 R_5} \right)$, $a_2 = \frac{a_1 R_7}{R_6}$,

$$b_0 = \frac{R_7}{R_1}.$$

478. Найти установившееся значение выходной величины $u_4(t)$ модели, схема которой изображена на рис. 341, а дифференциальное уравнение получено в предыдущей задаче, если входная величина $u_1(t) = 10 \cdot 1(t)$ в, $R_1 = 1$ мом, $R_6 = 100$ ком, $a_1 = 0,425$.

Ответ. $u_2(\infty) = -2,36$ в.

479. Составить схему модели идеального интегрирующего звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{p}$, $k = 14$ сек⁻¹.

Решение. Это звено набирается по схеме рис. 342. Составленное уравнение модели (см. решение задачи 477)

$$u_2 = -\frac{\alpha}{RCp} u_1,$$

откуда

$$k = -\frac{\alpha}{RC}.$$

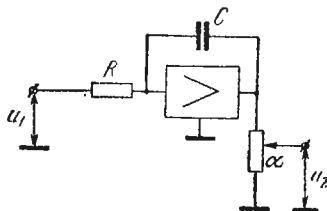


Рис. 342. Схема модели идеального интегрирующего звена.

Пусть $C = 1$ мкф и $R = 0,02$ мом, тогда $\alpha = kRC = 14 \cdot 0,02 \cdot 1 = 0,28$.

480. Составить схему модели апериодического звена первого порядка с передаточной функцией $W(p) =$

$$\frac{k}{Tp + 1}, \quad k = 29, \quad T = 0,24 \text{ сек.}$$

Решение. Схема модели изображена на рис. 343. Составленное уравнение модели (см. решение задачи 477) имеет вид

$$\left(\frac{R_2 C}{\alpha_1} p + 1\right) u_2 = \frac{R_2 R_4 \alpha_2}{R_1 R_3 \alpha_1} u_1,$$

откуда

$$T = \frac{R_2 C}{\alpha_1}, \quad k = \frac{R_2 R_4 \alpha_2}{R_1 R_3 \alpha_1}. \quad (1)$$

Соотношения (1) позволяют выбрать параметры схемы на рис. 343: $R_1 = R_2 = 0,1$ мом, $R_3 = 0,02$ мом, $R_4 = 1$ мом, $C = 1$ мкф, $\alpha_1 = 0,417$, $\alpha_2 = 0,242$.

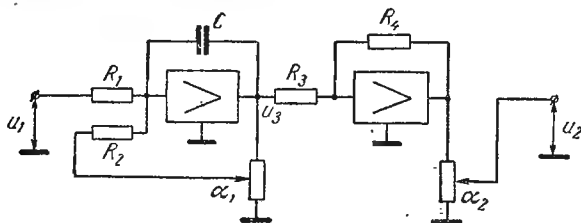


Рис. 343. Схема модели апериодического звена первого порядка.

481. Составить схему модели апериодического звена первого порядка с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$, $k = 0,83$, $T = 9$ сек.

Ответ. Схема модели изображена на рис. 343; $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ мом, $R_4 = 0,1$ мом, $C = 1$ мкф, $\alpha_1 = 0,111$, $\alpha_2 = 0,92$ (см. задачу 480).

482. Составить схему модели консервативного звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$, $k = 7$, $T = 0,34$ сек.

Решение. Схема модели изображена на рис. 344. Составленное уравнение модели (см. решение задачи 477)

имеет вид

$$\left(\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_5 \alpha_2} p^2 + 1 \right) u_2(t) = - \frac{R_2 \alpha_1}{R_1} u_1(t), \quad (1)$$

откуда

$$T = \sqrt{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_5 \alpha_2}}, \quad k = - \frac{R_2 \alpha_1}{R_1}. \quad (2)$$

Соотношения (2) позволяют выбрать параметры схемы на рис. 344: $R_1 = R_4 = 0,1$ мом, $R_2 = R_3 = R_5 = 1$ мом, $C_2 = C_1 = 1$ мкф, $\alpha_1 = 0,700$, $\alpha_2 = 0,863$.

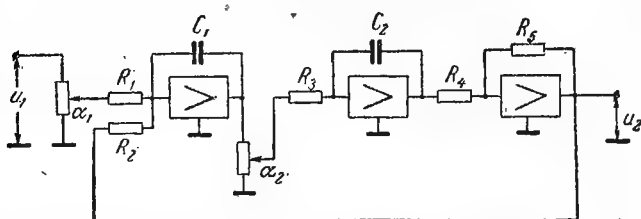


Рис. 344. Схема модели консервативного звена.

483. Составить схему модели консервативного звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$, $k = 1$, $T = 0,007$ сек.

Решение. Схема модели изображена на рис. 344 (см. задачу 482). Так как угловая частота свободных колебаний $q = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,007} = 143$ сек⁻¹ большая, то темп решения задачи необходимо замедлить, т. е. выбрать масштаб времени $m_t < 1$. Для перехода от натурального времени t к машинному t_m и обратно служит выражение

$$t = m_t t_m.$$

При этом в уравнении модели (1) предыдущей задачи вместо натурального времени t будет машинное время t_m , а вместо символа производной $p = \frac{d}{dt}$ — символ производной $p_m = \frac{d}{dt_m}$.

Тогда, подставив в уравнение модели (1) предыдущей задачи

$$p_m = m_t \frac{d}{dt} = \dot{m}_t p,$$

получим

$$\left(\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_5 \alpha_2} m_t^2 p^2 + 1 \right) u_2(t_m) = - \frac{R_2 \alpha_1}{R_1} u_1(t_m),$$

откуда

$$T = m_t \sqrt{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_5 \alpha_2}}, \quad k = - \frac{R_2 \alpha_1}{R_1}. \quad (1)$$

Так как $k=1$, то выбираем $R_1 = R_2 = 1$ мом, $\alpha_1 = 1$, т. е. в схеме рис. 344 можно отключить делитель напряжения α_1 . Для выбора масштаба времени из первого выражения (1) найдем

$$\alpha_2 = \left(\frac{m_t}{T} \right)^2 \frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_5}. \quad (2)$$

Так как коэффициент α_2 должен быть меньше единицы, то при $R_5 = R_2 = 1$ мом и $C_1 = C_2 = 1$ мкф выражение

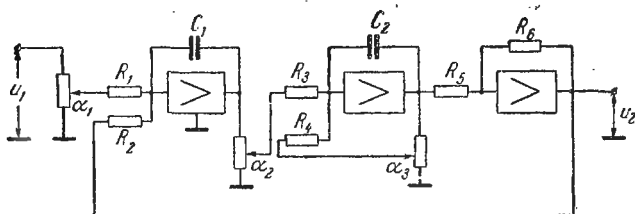


Рис. 345. Схема модели колебательного звена или апериодического звена второго порядка.

(2) позволяет выбрать $m_t = 0,1$, $R_3 = 0,1$ мом, $R_4 = 0,02$ мом, $\alpha_2 = 0,408$ или же $m_t = 0,01$, $R_3 = 0,1$ мом, $R_4 = 1$ мом, $\alpha_2 = 0,204$.

484. Составить схему модели колебательного звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$, $k=8$, $T=0,167$ сек, $\xi=0,56$.

Решение. Схема модели изображена на рис. 345. Составленное уравнение модели (см. решение задачи 477) имеет вид

$$\left(\frac{R_2 R_3 R_5^* C_1 C_2}{\alpha_2 R_6} p^2 + \frac{\alpha_3 R_2 R_3 R_5 C_1}{\alpha_2 R_4 R_6} p + 1 \right) u_2 = - \frac{\alpha_1 R_2}{R_1} u_1,$$

откуда находим

$$T = \sqrt{\frac{R_2 R_3 R_5 C_1 C_2}{\alpha_2 R_6}}, \quad \xi = \frac{\alpha_3 T}{2 R_4 C_2}, \quad k = - \frac{\alpha_1 R_2}{R_1}. \quad (1)$$

Соотношения (1) позволяют выбрать параметры схемы на рис. 345: $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 0,1$ мом, $R_2 = R_6 = 1$ мом, $C_1 = C_2 = 1$ мкф, $\alpha_1 = 0,800$, $\alpha_2 = 0,371$, $\alpha_3 = 0,670$.

485. Составить схему модели апериодического звена второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad \xi = 2,14, \quad k = 4,3, \quad T = 1,2 \text{ сек.}$$

Ответ. Схема модели изображена на рис. 345; $R_1 = R_4 = 0,1$ мом, $R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = 1$ мом, $C_1 = C_2 = 1$ мкф, $\alpha_1 = 0,214$, $\alpha_2 = 0,695$, $\alpha_3 = 0,357$ (см. предыдущую задачу).

§ 20.2. Составление схем для моделирования дифференциальных уравнений и автоматических систем на электронных вычислительных машинах

486. Составить схему модели для решения линейного дифференциального уравнения

$$(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5) y(t) = b_0 g(t)$$

в натуральном масштабе времени и при нулевых начальных условиях.

Решение. Преобразуем переменные $y(t)$ и $g(t)$ исходного уравнения в соответствующие переменные модели с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} y &= m_y u_5, \\ g &= m_g u. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подставив (1) в исходное уравнение, получим

$$(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5) u_5(t) = \frac{m_g}{m_y} b_0 u(t). \quad (2)$$

Разрешим уравнение (2) относительно старшей производной

$$p^5 u_5(t) = -\frac{a_1}{a_0} p^4 u_5 - \frac{a_2}{a_0} p^3 u_5 - \frac{a_3}{a_0} p^2 u_5 - \frac{a_4}{a_0} p u_5 - \frac{a_5}{a_0} u_5 + \frac{m_g}{m_y} \frac{b_0}{a_0} u(t). \quad (3)$$

По уравнению (3) составляем схему модели (рис. 346).
Схема модели составляется на основании следующего.

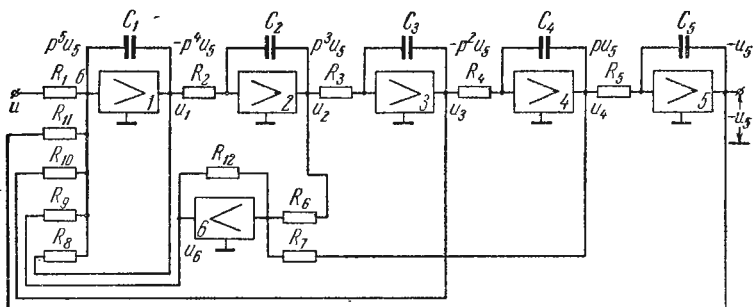


Рис. 346. Схема модели к задаче 486.

Согласно уравнению (3) высшая (пятая) производная переменной u_5 равна сумме членов, пропорциональных низшим производным и самой переменной u_5 , взятых с обратными знаками, и входной величине u . Предположим, что в точке б или в точке суммирования всех переменных имеем высшую производную ($p^5 u_5$). Тогда, включив последовательно интеграторы 1–5, на выходах последних будем получать напряжения, пропорциональные соответствующим низшим производным и самой переменной. Учитывая, что операционные усилители изменяют знак входного сигнала, необходимо включить сумматор б для изменения знака напряжений, пропорциональных положительным производным ($p^3 u_5$

и pu_5), снимаемых с четных (2 и 4) интеграторов. Интегратор 1 одновременно выполняет и функцию суммирования.

Для определения параметров модели (сопротивлений резисторов $R_1 - R_{12}$ и емкостей конденсаторов $C_1 - C_5$) найдем уравнение модели. Для этого составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{C_1 p} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{u_5}{R_{11}} + \frac{u_3}{R_{10}} + \frac{u_6}{R_9} + \frac{u_1}{R_8} \right), \\ u_2 &= -\frac{1}{C_2 p} \frac{u_1}{R_2}, \\ u_3 &= -\frac{1}{C_3 p} \frac{u_2}{R_3}, \\ u_4 &= -\frac{1}{C_4 p} \frac{u_3}{R_4}, \\ u_5 &= -\frac{1}{C_5 p} \frac{u_4}{R_5}, \\ u_6 &= -R_{12} \left(\frac{u_2}{R_6} + \frac{u_4}{R_7} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решив систему уравнений (4) относительно искомой переменной u_5 , получим уравнение модели в виде

$$\begin{aligned} & (C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 R_8 R_2 R_3 R_4 R_5 p^5 + C_2 C_3 C_4 C_5 R_2 R_3 R_4 R_5 p^4 + \\ & + \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_6} C_3 C_4 C_5 R_3 R_4 R_5 p^3 + \frac{R_8}{R_{10}} C_4 C_5 R_4 R_5 p^2 + \\ & + \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_7} C_5 R_5 p + \frac{R_8}{R_{11}}) u_5(t) = -\frac{R_8}{R_1} u(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Минус в правой части уравнения (5) появился в виду того, что при моделировании использовано нечетное число операционных усилителей (пять), включенных в прямую цепь. Чтобы уравнение (5) полностью соответствовало исходному, входную величину — напряжение u — следует подать на вход модели через инвертор, схема которого приведена в приложении 33.

Сравнив коэффициенты при переменных и их производных уравнения (5) с соответствующими

коэффициентами уравнения (2), получим

$$\left. \begin{aligned} C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 R_8 R_2 R_3 R_4 R_5 &= a_0, \\ C_2 C_3 C_4 C_5 R_2 R_3 R_4 R_5 &= a_1, \\ \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_6} C_3 C_4 C_5 R_3 R_4 R_5 &= a_2, \\ \frac{R_8}{R_{10}} C_4 C_5 R_4 R_5 &= a_3, \\ \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_7} C_5 R_5 &= a_4, \\ \frac{R_8}{R_{11}} &= a_5, \\ \frac{R_8}{R_1} &= - \frac{m_g}{m_y} b_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

После выбора масштабных коэффициентов, уравнения (6) позволяют (произвольным образом) выбрать параметры модели при известных значениях коэффициентов исходного уравнения.

487. Как изменятся параметры модели на рис. 346, если дифференциальное уравнение из условия предыдущей задачи решать в измененном масштабе времени, т. е. решать в замедленном или ускоренном темпе?

Решение. Для перехода от натурального времени t к машинному t_m и обратно служит уравнение

$$t = m_t t_m, \quad (1)$$

где m_t — масштаб времени. При $m_t > 1$ темп решения задачи ускоренный, а при $m_t < 1$ — замедленный.

При выборе $m_t \neq 1$ темп протекания процессов в модели должен отличаться от темпа процессов, описываемых исходным дифференциальным уравнением, т. е. в уравнении модели (5) предыдущей задачи вместо натурального времени t будет машинное время t_m , а вместо символа производной $p = \frac{d}{dt}$ — символ производной

$$p_m = \frac{d}{dt_m}.$$

Тогда, подставив в уравнение (5) предыдущей задачи

$$p_m = m_t \frac{d}{dt} = m_t p,$$

получим

$$\begin{aligned} & (C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 R_8 R_2 R_3 R_4 R_5 m_t^5 p^5 + C_2 C_3 C_4 C_5 R_2 R_3 R_4 R_5 m_t^4 p^4 + \\ & + \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_6} C_3 C_4 C_5 R_3 R_4 R_5 m_t^3 p^3 + \frac{R_8}{R_{10}} C_4 C_5 R_4 R_5 m_t^2 p^2 + \\ & + \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_7} C_5 R_5 m_t p + \frac{R_8}{R_{11}}) u_5(t_m) = -\frac{R_8}{R_1} u(t_m). \end{aligned}$$

Из сравнения коэффициентов при переменных и их производных полученного уравнения с соответствующими коэффициентами уравнения (2) предыдущей задачи имеем

$$\left. \begin{aligned} C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 R_8 R_2 R_3 R_4 R_5 &= a_0 m_t^{-5}, \\ C_2 C_3 C_4 C_5 R_2 R_3 R_4 R_5 &= a_1 m_t^{-4}, \\ \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_6} C_3 C_4 C_5 R_3 R_4 R_5 &= a_2 m_t^{-3}, \\ \frac{R_8}{R_{10}} C_4 C_5 R_4 R_5 &= a_3 m_t^{-2}, \\ \frac{R_8}{R_9} \frac{R_{12}}{R_7} C_5 R_5 &= a_4 m_t^{-1}, \\ \frac{R_8}{R_{11}} &= a_5, \\ \frac{R_8}{R_1} &= -\frac{m_g}{m_y} b_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из полученных соотношений видно, что при решении задачи в замедленном темпе ($m_t < 1$) величины сопротивлений резисторов $R_1 - R_{12}$ и емкостей конденсаторов $C_1 - C_5$ модели на рис. 346 необходимо увеличивать, а при ускоренном темпе ($m_t > 1$) — уменьшать.

488. Составить в общем виде схему модели следящей системы, принципиальная и структурная схемы которой изображены на рис. 22, а параметры и уравнения отдельных звеньев заданы в условии задачи 38.

Решение. Воспользуемся передаточными функциями отдельных звеньев и структурной схемой следящей системы из решения задачи 38.

Преобразуем структурную схему следящей системы (рис. 22, б). Перенесем сумматор 1 на вход предыдущего звена и преобразуем два последних звена прямой цепи, в результате чего получим структурную схему, приведенную на рис. 347, а.

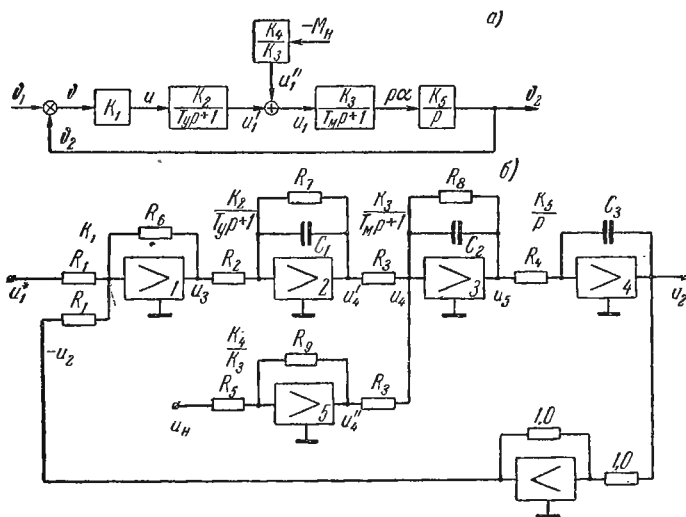


Рис. 347. Структурная схема (а) и схема модели (б) следящей системы.

В этой следящей системе выделим три физические величины: угол поворота, момент нагрузки и напряжение. Масштабы для времени t_t и для напряжения t_u примем равными единице. Масштабы по углу и моменту будем выбирать из соотношений

$$\left. \begin{aligned} M_H &= t_M u_H, \\ \vartheta &= t_\vartheta u. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для перехода от структурной схемы следящей системы (рис. 347, а) к схеме модели воспользуемся моделями элементов структурных схем автоматических систем (приложение 33). В результате замены элементов структурной схемы (рис. 347, а) соответствующими

элементами модели (приложение 33) получим схему модели следящей системы (рис. 347, б). На основании принятых масштабов обозначим на схеме модели соответствующие структурной схеме следящей системы величины напряжений

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{m_\Phi} \vartheta_1, & u_2 &= \frac{1}{m_\Phi} \vartheta_2, & u_n &= \frac{1}{m_M} M_n, \\ u_3 &= u, & u'_4 &= u'_1, & u''_4 &= u''_1, & u_5 &= \frac{1}{m_\Phi} p a. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно формулам приложения 33 находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_6}{R_1} &= k_1, & \frac{R_7}{R_2} &= k_2, & C_1 R_7 &= T_y, & \frac{R_8}{R_3} &= k_3, \\ C_2 R_8 &= T_m, & \frac{1}{C_3 R_4} &= k_5, & \frac{R_9}{R_5} &= \frac{m_M}{m_\Phi} \cdot \frac{k_4}{k_8}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При известных числовых значениях параметров следящей системы и при выборе масштабных коэффициентов формулы (3) позволяют выбрать параметры модели (сопротивления резисторов $R_1 - R_9$ и емкости конденсаторов $C_1 - C_3$), при этом изменением величины масштабных коэффициентов в допустимых пределах облегчается задача выбора параметров модели.

489. Составить уравнение модели, изображенной на рис. 347, б относительно выходной величины u_2 по входным u_1^* и u_n , с учетом масштабных коэффициентов, принятых при решении предыдущей задачи.

Ответ.

$$\begin{aligned} & \left[(C_1 R_7 p + 1)(C_2 R_8 p + 1) p + \frac{R_6 R_7 R_8}{R_1 R_2 R_3 C_3 R_4} \right] u_2(t) = \\ & = \frac{R_6 R_7 R_8}{R_1 R_2 R_3 C_3 R_4} u_1^*(t) - \frac{m_M R_8 R_9}{m_\Phi R_5 R_3 C_3 R_4} (C_1 R_7 p + 1) u_n(t). \end{aligned}$$

490. Составить в общем виде схему модели релейной следящей системы, отличающейся от следящей системы, схема которой изображена на рис. 22, тем, что вместо линейного усилителя взят релейный со статической характеристикой, приведенной на рис. 348, а. Параметры и уравнения всех остальных линейных звеньев заданы в условии задачи 38.

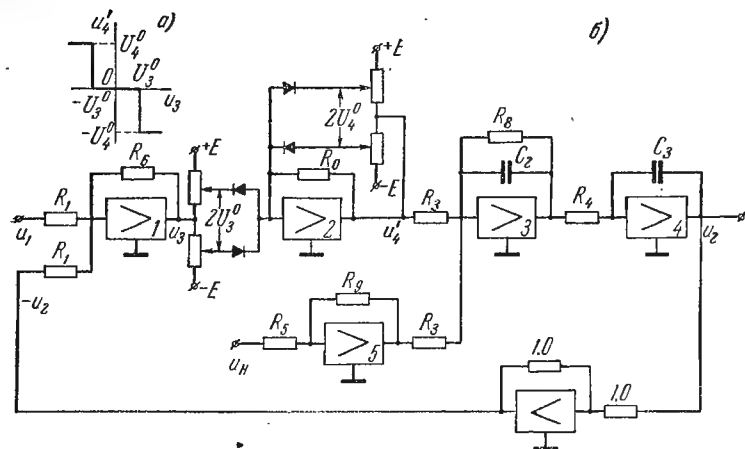


Рис. 348. Статическая характеристика (а) и схема модели (б) к задаче 490.

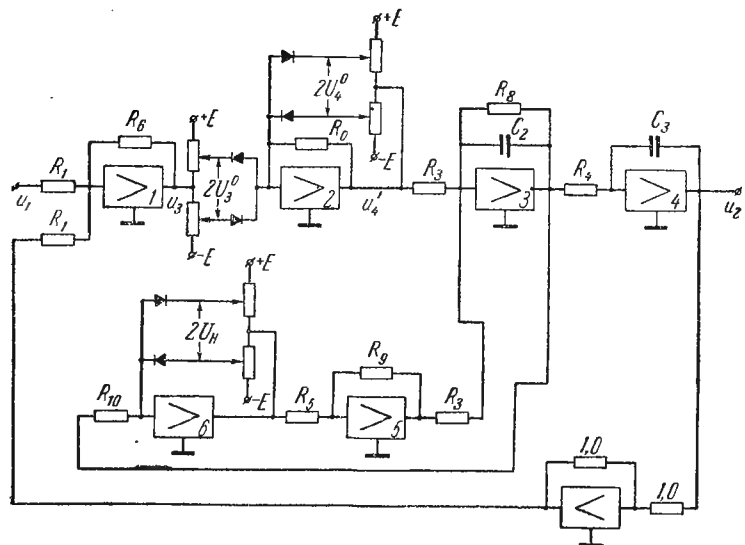


Рис. 349. Схема модели к задаче 491.

Ответ. Схема модели релейной следящей системы представлена на рис. 348, б. Схема модели релейного усилителя взята из приложения 34, при этом принято $U_3 = U_4 = U_3^0$, $U_5 = U_6 = U_4^0$. Выбор масштабных коэффициентов и параметров линейных элементов модели приведен в решении предыдущей задачи.

491. Составить в общем виде схему модели нелинейной следящей системы, отличающейся от следящей системы, схема которой изображена на рис. 22, тем, что вместо линейного усилителя взят релейный со статической характеристикой, изображенной на рис. 348, а. Кроме того, необходимо учесть приведенный к валу двигателя следящей системы момент нагрузки M_n от сил сухого трения ($M_n = M_n^0 \operatorname{sign} \Omega$; см. рис. 337, б). Параметры и уравнения линейных звеньев заданы в условии задачи 38.

Ответ. Схема модели нелинейной следящей системы с релейным усилителем и с учетом влияния момента нагрузки от сил сухого трения представлена на рис. 349. См. задачи 474 и 490.

1. Изображения по Лапласу и Карсону — Хевисайду функций времени

Таблица П.1

№ п. п.	Оригинал	Изображение Лапласа	Изображение Карсона — Хевисайда
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	1
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{n!}{p^n}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{p}{p + \alpha}$
4	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
5	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{p}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
6	$\frac{(\delta - \alpha) e^{-\alpha t} - (\delta - \beta) e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{p + \delta}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{p(p + \delta)}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
7	$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}$	$\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
8	$\frac{\delta}{\alpha\beta} + \frac{\delta - \alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} +$ $+ \frac{\delta - \beta}{\beta(\beta - \alpha)} e^{-\beta t}$	$\frac{p + \delta}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{p + \delta}{(p + \alpha)(p + \beta)}$

Продолжение табл. П.1

№ п. п.	Оригинал	Изображение Лапласа	Изображение Карсона — Хевисайда
9	$\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t$	$\frac{1}{p^2 + \lambda^2}$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$
10	$\frac{\sqrt{\delta^2 + \lambda^2}}{\lambda} \sin (\lambda t + \psi)$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\delta}$	$\frac{p + \delta}{p^2 + \lambda^2}$	$\frac{p(p + \delta)}{p^2 + \lambda^2}$
11	$\frac{1}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t$	$\frac{1}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{p}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$
12	$\frac{1}{\lambda} \sqrt{(\delta - \gamma)^2 + \lambda^2} \times$ $\times e^{-\gamma t} \sin (\lambda t + \psi)$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\delta - \gamma}$	$\frac{p + \delta}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{p(p + \delta)}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$
13	$\frac{1}{\gamma^2 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}} \times$ $\times e^{-\gamma t} \sin (\lambda t - \psi)$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\gamma}$	$\frac{1}{p[(p + \gamma)^2 + \lambda^2]}$	$\frac{1}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$
14	$\frac{\delta}{\gamma^2 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}} \times$ $\times \sqrt{(\delta - \gamma)^2 + \lambda^2} e^{-\gamma t} \sin (\lambda t + \psi)$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\delta - \gamma} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$	$\frac{p + \delta}{p[(p + \gamma)^2 + \lambda^2]}$	$\frac{p + \delta}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$

№ п. п.	Оригинал $f(t)$	Преобразование Лапласа $F_L(p)$	z-преобразование $F(z)$	Модифицированное z-преобразование $F(z, \sigma)$
1	1 (t)	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{\sigma T_0 z}{z-1}$
3	$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_0^2 z (z+1)}{2 (z-1)^3}$	$\frac{T_0^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(1+2\sigma) T_0^2 z}{2 (z-1)^2} + \frac{(\sigma T_0)^2 z}{2 (z-1)}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}, d=e^{-\alpha T_0}$	$\frac{z d^\sigma}{z-d}$
5	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, d=e^{-\alpha T_0}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z d^\sigma}{z-d}$
6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T_0}{z^2-2z \cos \beta T_0+1}$	$\frac{z^2 \sin \sigma \beta T_0 + z \sin \delta \beta T_0}{z^2-2z \cos \beta T_0+1}, \delta=1-\sigma$
7	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$\frac{z^2-z \cos \beta T_0}{z^2-2z \cos \beta T_0+1}$	$\frac{z^2 \cos \sigma \beta T_0 - z \cos \delta \beta T_0}{z^2-2z \cos \beta T_0+1}$
8	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{z d \sin \beta T_0}{z^2-2z d \cos \beta T_0+d^2}$	$z d^\sigma \left(\frac{z \sin \sigma \beta T_0 + d \sin \delta \beta T_0}{z^2-2z d \cos \beta T_0+d^2} \right)$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{z^2-z d \cos \beta T_0}{z^2-2z d \cos \beta T_0+d^2}$	$z d^\sigma \left(\frac{z \cos \sigma \beta T_0 - d \cos \delta \beta T_0}{z^2-2z d \cos \beta T_0+d^2} \right)$

3. Нормированная логарифмическая частотная фазовая характеристика аperiodического звена первого порядка (рис. 350)

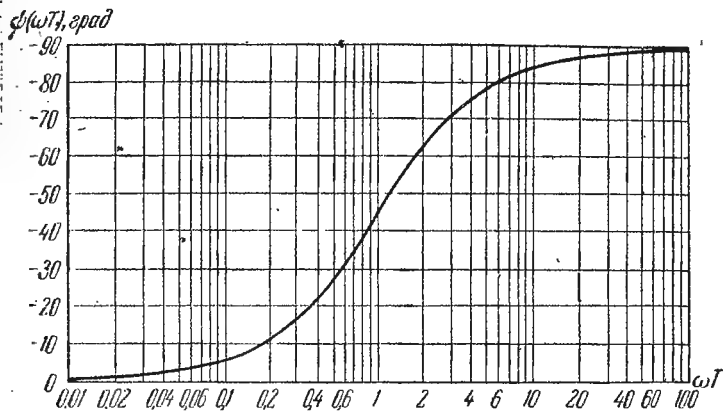


Рис. 350.

4. Нормированные логарифмические амплитудная и фазовая характеристики колебательного звена (рис. 351а и рис. 351б)

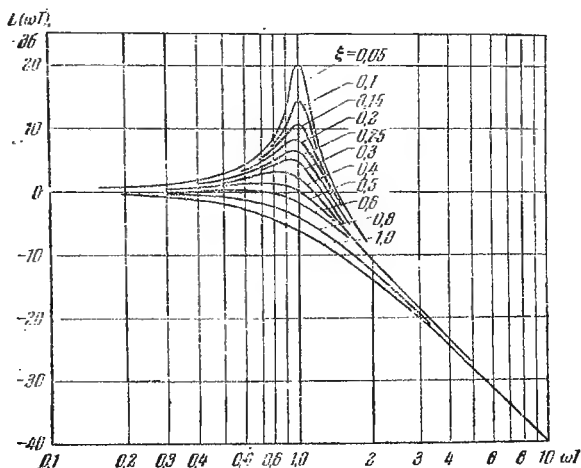


Рис. 351а.

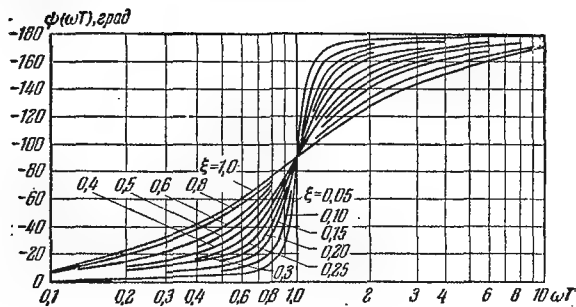


Рис. 3516.

Б. Отклонение асимптотической л. а. х. колебательного звена от точной (рис. 352)

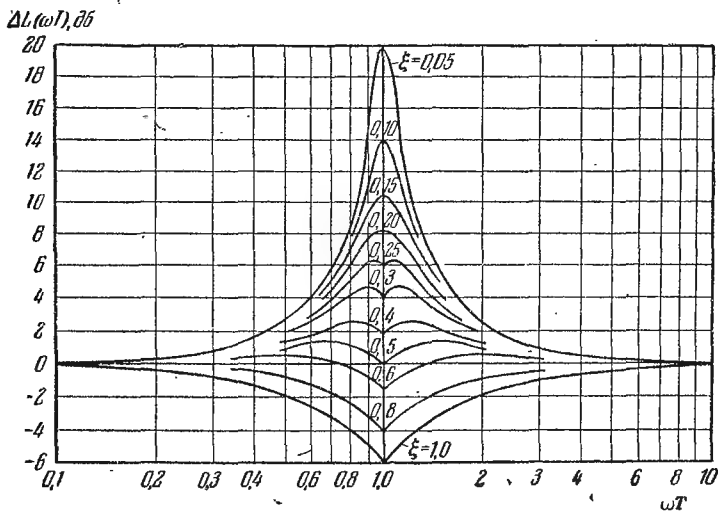


Рис. 352.

6. Критерий устойчивости Гурвица

Линейная САУ, характеристический многочлен, который равен

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p^2 + a_{n-2} p + a_n$$

и $a_0 > 0$, устойчива, если положительны n главных определителей матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = |a_1| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0.$$

Последнее выражение сводится к неравенству $a_n > 0$, так как предыдущий определитель $\Delta_{n-1} > 0$.

Частные случаи критерия устойчивости Гурвица

1) $D(p) = a_0 p + a_1$.

Условия устойчивости $a_0 > 0$, $a_1 > 0$.

2) $D(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$.

Условия устойчивости $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

3) $D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$.

Условия устойчивости

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

4) $D(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4$.

Условия устойчивости

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, \\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0.$$

$$5) D(p) = a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5.$$

Условия устойчивости

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0, \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \\ (a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2 > 0.$$

$$6) D(p) = a_0p^6 + a_1p^5 + a_2p^4 + a_3p^3 + a_4p^2 + a_5p + a_6.$$

Условия устойчивости

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0, a_6 > 0, \\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1(a_1a_4 - a_0a_5) > 0, \\ (a_1a_2 - a_0a_3)[a_5(a_4a_3 - a_2a_5) + a_6(2a_1a_5 - a_3^2)] + \\ + (a_1a_4 - a_0a_5)[a_1a_3a_6 - a_5(a_1a_4 - a_0a_5)] - a_1^3a_6^2 > 0.$$

7. Диаграмма Вышнеградского с линиями равного затухания в процентах за один период (рис. 353)

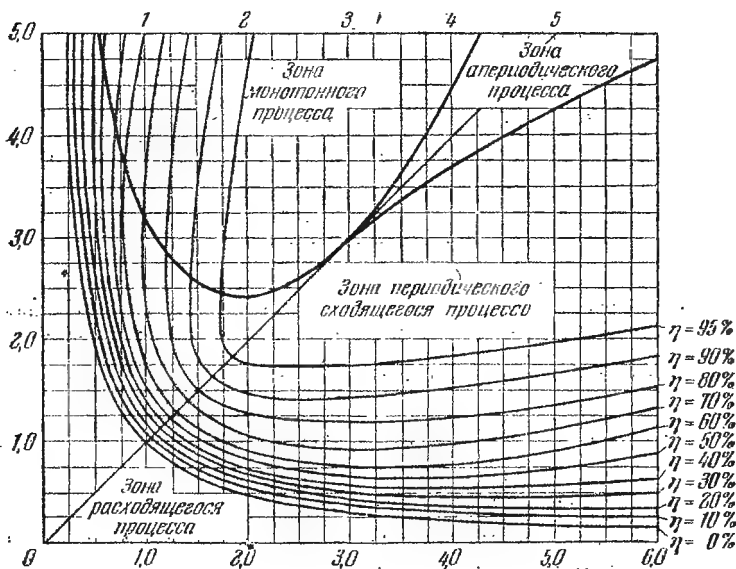


Рис. 353.

8. Диаграмма Вышнеградского с линиями равной нормированной степени устойчивости $h_0 = h \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}$ (рис. 354)

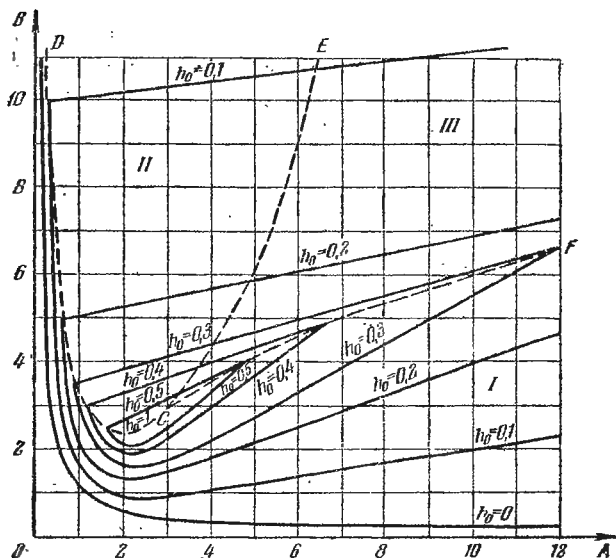


Рис. 354.

9. Эквивалентные начальные условия в системе регулирования после воздействия на нее единичной ступенчатой функции

Дифференциальное уравнение системы

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(t),$$

где $y(t)$ — выходная величина, $g(t)$ — входное воздействие; y_{-0} , $y'_{-0}, \dots, y_{-0}^{(n-1)}$ — начальные условия, имеющие место непосредственно перед приложением единичной ступенчатой функции; y_{+0} , $y'_{+0}, \dots, y_{+0}^{(n-1)}$ — начальные условия, имеющие место непосредственно

после приложения единичной ступенчатой функции:

$$y_{+0} = y_{-0}, \quad y'_{+0} = y'_{-0}, \dots, \quad y_{+0}^{(n-m-1)} = y_{-0}^{(n-m-1)},$$

$$y_{+0}^{(n-m)} = y_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1,$$

$$y_{+0}^{(n-m+1)} = y_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_1}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} [y_{+0}^{(n-m)} - y_{-0}^{(n-m)}],$$

$$\dots \dots \dots y_{+0}^{(n-1)} = y_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_{m-1}}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_{m-1}}{a_0} [y_{+0}^{(n-m)} - y_{-0}^{(n-m)}] - \dots$$

$$\dots - \frac{a_1}{a_0} [y_{+0}^{(n-2)} - y_{-0}^{(n-2)}].$$

10. Решения однородных дифференциальных уравнений первого, второго и третьего порядков

Таблица П.3

Порядок уравнения	Вещественные корни	Комплексные корни
1	$x = x_0 e^{-\alpha_1 t}$	—
2	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$ $A_1 = \frac{\alpha_2 x_0 + v_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$ $A_2 = \frac{\alpha_1 x_0 + v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$	$x = (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $B = x_0$ $C = \frac{\gamma x_0 + v_0}{\lambda}$
3	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + A_3 e^{-\alpha_3 t}$ $A_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_3 x_0 + (\alpha_2 + \alpha_3) v_0 + \varepsilon_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}$ $A_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_3 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_3) v_0 + \varepsilon_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)}$ $A_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) v_0 + \varepsilon_0}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}$	$x = A e^{-\alpha_1 t} + (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $A = \frac{(\gamma^2 + \lambda^2) x_0 + 2\gamma v_0 + \varepsilon_0}{(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2}$ $B = \frac{\alpha_1 (\alpha_1 - 2\gamma) x_0 + 2\gamma v_0 - \varepsilon_0}{(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2}$ $C = \frac{\alpha_1 (\lambda^2 - \gamma^2 + \gamma \alpha_1) x_0 + (\alpha_1^2 - \gamma^2 + \lambda^2) v_0}{\lambda [(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2]} + \frac{(\alpha_1 - \gamma) \varepsilon_0}{\lambda [(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2]}$

Примечание. Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — абсолютные значения вещественных корней, γ и λ — абсолютные значения вещественной и мнимой частей комплексных корней, x_0 — начальное значение исследуемой функции, $v_0 = x'(0)$ и $\varepsilon_0 = x''(0)$ — начальные значения скорости и ускорения изменения исследуемой функции.

11. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы (вещественная круговая диаграмма) (рис. 355)

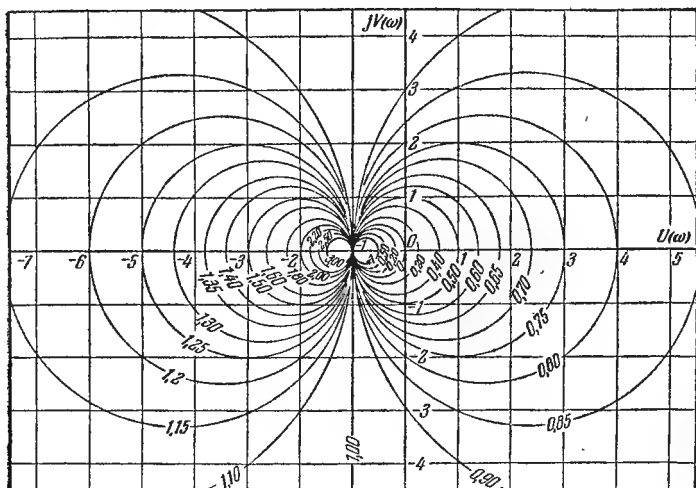


Рис. 355.

12. Кривые для определения времени переходного процесса и перерегулирования по коэффициенту наклона трапецеидальной вещественной частотной характеристики (рис. 356)

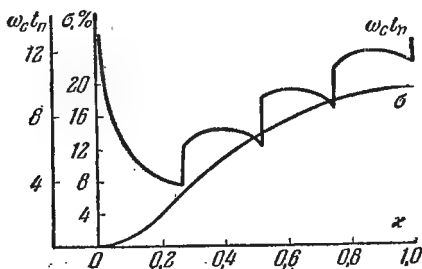


Рис. 356.

13. Кривые для определения времени переходного процесса и перерегулирования для вещественной частотной характеристики, имеющей максимум (рис. 357)

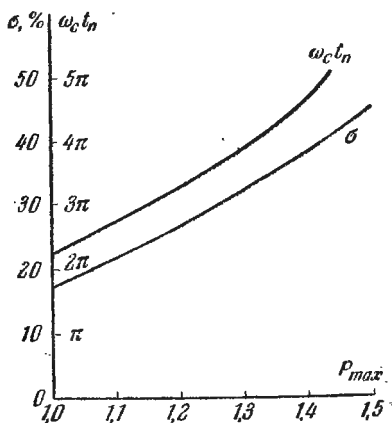


Рис. 357.

14. Зависимость требуемого запаса по фазе от модуля в децибелах при различных показателях колебательности (рис. 358)

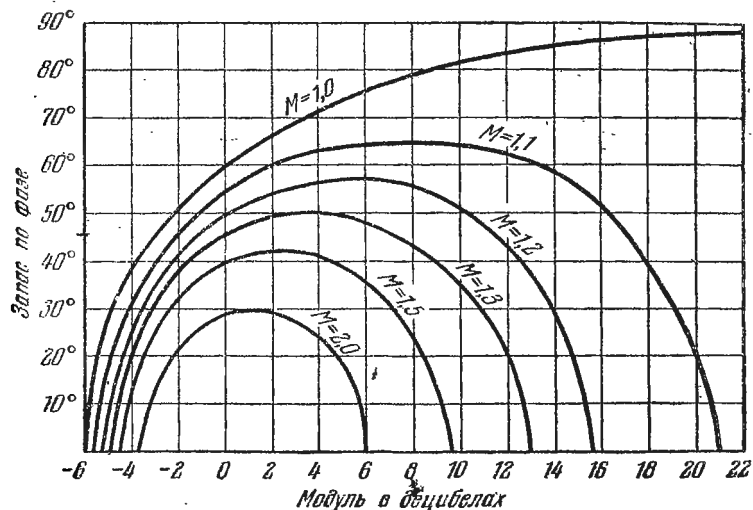


Рис. 358.

15. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики по заданным качественным показателям (рис. 359)

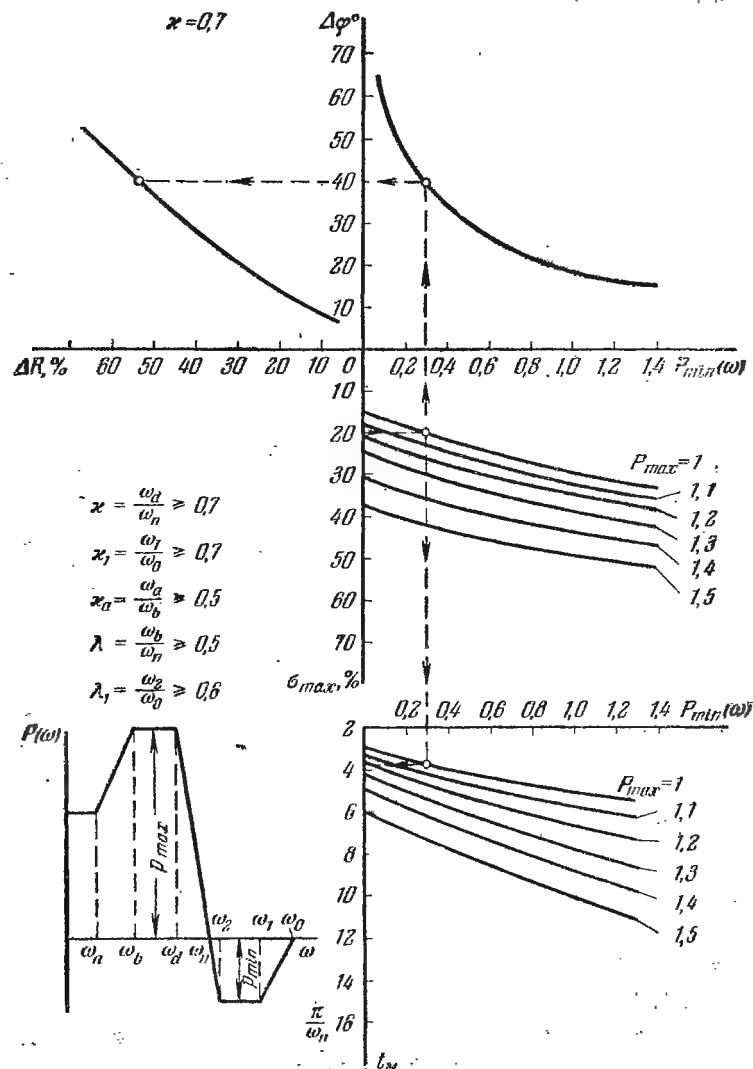


Рис. 359.

16. Нахождение квадратичной интегральной оценки

$$I = \int_0^{\infty} x^2 dt,$$

где $x = y - y_{\infty}$ — отклонение регулируемой величины от установившегося значения y_{∞} .

Изображение регулируемой величины по Лапласу представляется в виде

$$Y(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \frac{1}{p} \quad (n > m).$$

Тогда интегральная оценка может быть вычислена из выражения

$$I = \frac{1}{2a_0^2 \Delta} (B_0 \Delta_0 + B_1 \Delta_1 + \dots + B_m \Delta_m - 2b_0 b_1 \Delta).$$

Определитель Δ находится следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & -a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Δ_v ($v=0, 1, \dots, m$) — определитель, получающийся из Δ заменой $(v+1)$ -го столбца столбцом

$$a_1, a_0, 0, \dots, 0.$$

Коэффициенты $B_1, \dots, B_m$ вычисляются следующим образом:

$$B_0 = b_0^2,$$

$$B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2,$$

$$\dots$$

$$B_k = b_k^2 - 2b_{k-1} b_{k+1} + \dots + 2(-1)^k b_0 b_{2k},$$

$$\dots$$

$$B_m = b_m^2.$$

17. Формулы для интегрирования спектральной плотности

Искомый интеграл представляется в виде

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega,$$

где

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.$$

Многочлен $G(j\omega)$ содержит только четные степени $j\omega$. Многочлен $A(j\omega)$ должен иметь корни в верхней полуплоскости, что соответствует устойчивой системе.

Для $n=1$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 d\omega}{|a_0 j\omega + a_1|^2} = \frac{b_0}{2a_0 a_1}.$$

Для $n=2$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[b_0(j\omega)^2 + b_1] d\omega}{|a_0(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_2|^2} = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1}.$$

Для $n=3$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[b_0(j\omega)^4 + b_1(j\omega)^2 + b_2] d\omega}{|a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3|^2} =$$

$$= \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)}.$$

Для $n=4$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[b_0(j\omega)^6 + b_1(j\omega)^4 + b_2(j\omega)^2 + b_3] d\omega}{|a_0(j\omega)^4 + a_1(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_3 j\omega + a_4|^2} =$$

$$= \frac{b_0(-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2a_0(a_0^2 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}.$$

18. Нормированные стандартные передаточные функции разомкнутой системы

Передаточные функции для различных степеней n дифференциального уравнения приведены в табл. П.4.

Таблица П.4

Степень асимметрии	n	$\sigma, \%$	K	$W(p)$
1	2	5	$\frac{\omega_0}{1,4}$	$\frac{\omega_0^2}{p^2 + 1,4\omega_0 p}$
	3	8	$\frac{\omega_0}{2}$	$\frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p}$
	4	10	$\frac{\omega_0}{2,6}$	$\frac{\omega_0^4}{p^4 + 2,6\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,6\omega_0^3 p}$
2	2	10	ω_0^2	$\frac{2,5\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2}$
	3	10	$\frac{\omega_0^2}{5,1}$	$\frac{6,3\omega_0^2 p + \omega_0^3}{p^3 + 5,1\omega_0 p^2}$
	4	10	$\frac{\omega_0^2}{16}$	$\frac{12\omega_0^3 p + \omega_0^4}{p^4 + 7,2\omega_0 p^3 + 16\omega_0^2 p^2}$
	5	10	$\frac{\omega_0^2}{38}$	$\frac{18\omega_0^4 p + \omega_0^5}{p^5 + 9\omega_0 p^4 + 29\omega_0^2 p^3 + 38\omega_0^3 p^2}$
	6	10	$\frac{\omega_0^2}{73}$	$\frac{25\omega_0^5 p + \omega_0^6}{p^6 + 11\omega_0 p^5 + 43\omega_0^2 p^4 + 83\omega_0^3 p^3 + 73\omega_0^4 p^2}$

В них введен параметр ω_0 , определяющий быстродействие системы. Переходные характеристики, соответствующие этим передаточным функциям, приведены на рис. 360. Перерегулирование $\sigma\%$ приведено в таблице.

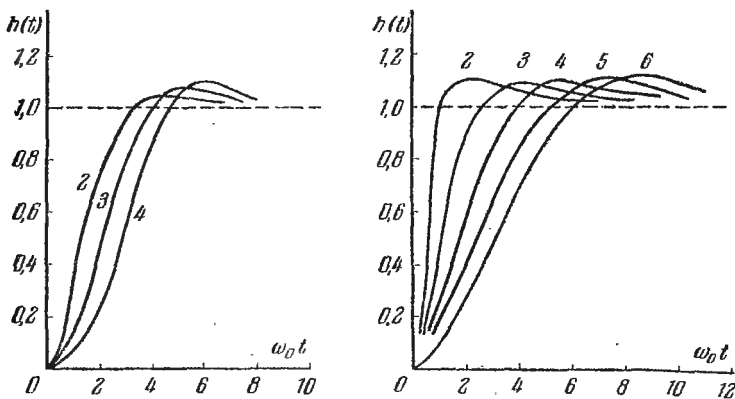


Рис. 360. Переходные характеристики, соответствующие стандартным передаточным функциям.

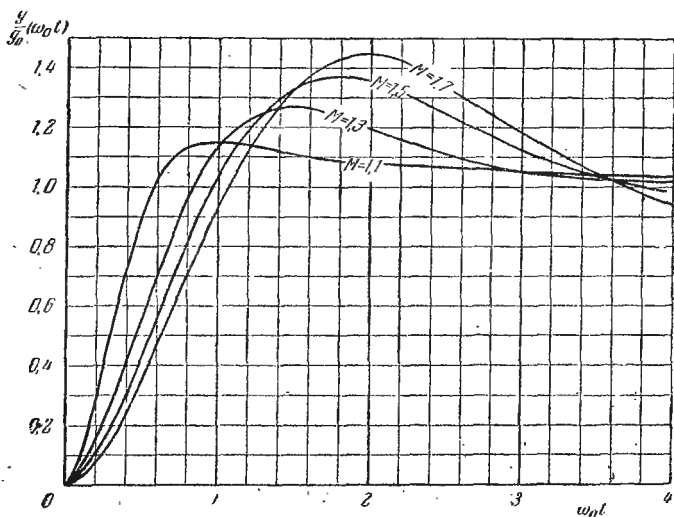


Рис. 361. Переходные функции для типовых л. а. х. симметричного вида.

19. Типовые л. а. к., соответствующие

Симметрич

Порядок астагизма	Передающая функция разомкнутой системы	Вид л. а. к.
0	$\frac{K(1+T_2p)}{(1+T_0p)(1+T_1p)\prod_{i=3}^n(1+T_ip)}$	
1	$\frac{K(1+T_2p)}{P(1+T_1p)\prod_{i=3}^n(1+T_ip)}$	
2	$\frac{K(1+T_2p)}{p^2\prod_{i=3}^n(1+T_ip)}$	

M — показатель колебательности. Для типовых симметричных

заданному запасу устойчивости

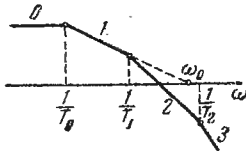
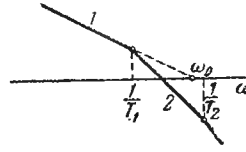
Таблица П.5

ные л. а. х.

Тип л. а. х.	Базовая частота	Частота среза	Постоянные времени в области средних и высоких частот	
			связь с базовой частотой	связь с частотой среза
0-1-2-1-2-3...	$\sqrt{\frac{K}{T_0 T_1}}$	$\frac{KT_2}{T_0 T_1}$	$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}$	$T_2 \geq \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{M}{M-1}$
1-2-1-2-3...	$\sqrt{\frac{K}{T_1}}$	$\frac{KT_2}{T_1}$		
2-1-2-3...	$\sqrt{K}$	KT_2		
			$\sum T_i \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}$	$\sum T_i \leq \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{M}{M+1}$

л. а. х. оп равен $M = \frac{m+1}{m-1}$, где $m = \frac{T_2}{\sum_{i=3}^n T_i}$.

Несимметричные л. а. х.

Порядок астатизма	Передаточная функция разомкнутой системы	Вид л. а. х.	Тип л. а. х.	Базовая частота, ω_0	Постоянные времени в области средних и высоких частот
0	$\frac{K}{(1 + T_0 p) \prod_{i=1}^n (1 + T_{ip})}$		0-1-2-3...	$\frac{K}{T_0}$	$\sum_{i=1}^n T_i \leq$
I	$\frac{K}{p \prod_{i=1}^n (1 + T_{ip})}$		1-2-3...	K	$\leq \frac{1}{\omega_0} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}$

Приведенная здесь формула для $\sum_{i=1}^n T_i$ является приближенной; она дает достаточную точность при $M \leq 1,3$. Эта формула становится точной при $M=1$ и любом n , либо при $n=1$ и любом M .

20. Нормированные кривые переходных процессов для типовых л. а. х.

А. Кривые переходных процессов при входном воздействии в виде ступенчатой функции $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$.

1) Случай симметричных л. а. х. (приложение 19, табл. П.5), рис. 361.

Кривые рассчитаны для л. а. х. типа 2—1—2, но с большой точностью отображают переходные процессы в случае всех типов л. а. х., приведенных в табл. П.5.

2) Случай несимметричных л. а. х. (приложение 19, табл. П.6), рис. 362.

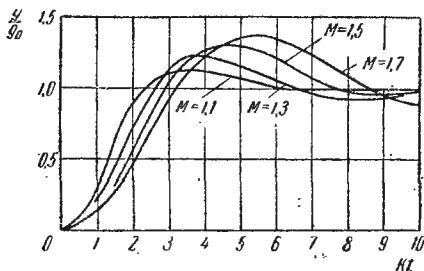


Рис. 362. Переходные процессы для типовых л. а. х. несимметричного вида.

Кривые рассчитаны для л. а. х. типа 1—2, но практически пригодны для л. а. х. всех типов, приведенных в табл. П.6.

Б. Кривые ошибки воспроизведения линейного задающего воздействия $g(t) = at \cdot 1(t)$

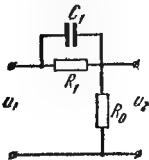
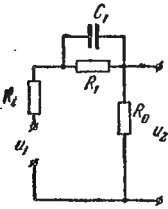
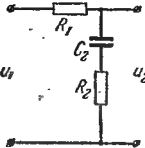
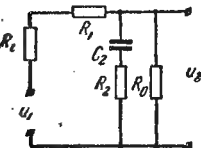
1) Случай симметричных л. а. х. (приложение 19, табл. П.5), рис. 363.

Кривые рассчитаны для л. а. х. типа 2—1—2, но практически пригодны и для л. а. х. остальных типов, приведенных в табл. П.5).

2) Случай несимметричных л. а. х. (приложение 19, табл. П.6), рис. 364.

Кривые рассчитаны для л. а. х. типа 1—2, но практически пригодны и для л. а. х. остальных типов, приведенных в табл. П.6.

21. Корректирующие звенья

Схема корректирующего звена	Передаточная функция корректирующего звена	T_1
	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$	$R_1 C_1$
	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$	$R_1 C_1$
	$\frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}$	$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) T_2$
	$G_0 \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}$	$(R_0 R_1 + R_2 R_0 + R_2 R_1 + R_0 R_1 + R_1 R_2) C_2 \times (R_1 + R_0 + R_1)^{-1}$

ПОСТОЯННОГО ТОКА

Таблица II.7

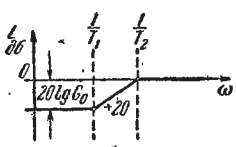
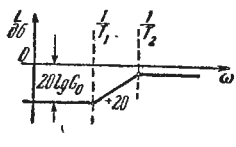
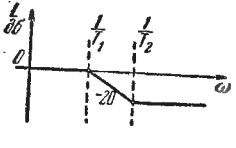
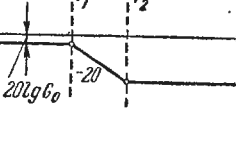
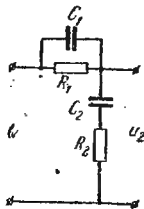
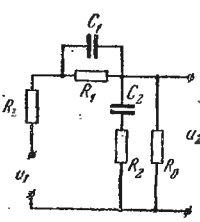
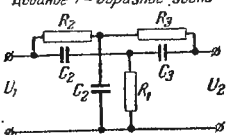
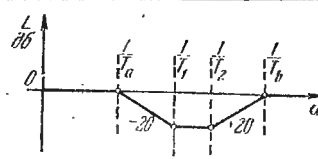
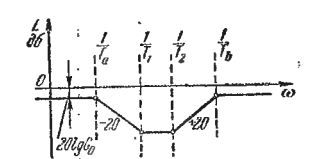
T_2	G_0	Асимптотическая л. а. х.
$\frac{T_1}{1 + \frac{R_0}{R_1}}$	$\frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_1}}$	
$\frac{R_0 + R_l}{R_0 + R_1 + R_l} \cdot T_1$	$\frac{R_0}{R_0 + R_1 + R_l}$	
$R_2 C_2$	1	
$R_2 C_2$	$\frac{R_0}{R_0 + R_1 + R_l}$	

Схема корректирующего звена	Передаточная функция корректирующего звена	T_1
	$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{1 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + T_2 \right] p + T_1 T_2 p^2}$	$R_1 C_1$
	$G_0 \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+Ap+Bp^2)}$ $A = \frac{(R_1+R_0)(R_1 C_1+R_2 C_2) + (R_1 R_0+R_0 R_1+R_1 R_2) C_2}{R_0+R_1+R_2}$	$R_1 C_1$

22. Корректирующее звено переменного

Схема	Передаточные функции звена
Двойное Т-образное звено  $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$, $T_3 = R_3 C_3$ $S_1 = R_1 C_3$, $S_2 = R_2 C_3$	Параметрическая $\frac{U_2}{U_1} = \frac{A(p)}{B(p)}$ где $A(p) = T_1 T_2 T_3 p^3 + T_1 (S_2 + T_3) p^2 + (T_1 + S_1) p + 1$ $B(p) = T_1 T_2 T_3 p^3 + T_1 (S_2 + T_3) p^2 + T_2 (T_1 + S_1 + T_3) p^2 + (T_1 + S_1 + T_2 + T_3 + S_2) p + 1$ По огибающей $\frac{U_2(j\Omega)}{U_1(j\Omega)} = G_0 \frac{1 + T_A j\Omega}{1 + \tau j\Omega}$

Продолжение табл. П.7

T_2	G_0	Асимптотическая л. а. ж.
$R_3 C_2$	1	
$R_3 C_2$	$\frac{R_0}{R_0 + R_1 + R_i}$	

$$B = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2 (R_0 + R_i) + R_0 R_i R_1 C_1 C_2}{R_0 + R_1 + R_i};$$

тока (двойное Т-образное звено)

Таблица П.8

Связь между параметрическими постоянными времени и постоянными времени по огибающей	Условия осуществимости звена
$T_1 = G_0 \frac{\omega_H T_d x + 2x + \omega_H T_d}{2\omega_H (1 - G_0)}$ $T_2 = \frac{x^2}{T_1 \omega_H}, \quad T_3 = \frac{1}{x \omega_H}$ $S_1 = -\frac{2}{\omega_H^2 T_d} + \frac{x}{\omega_H} - T_1$ $S_2 = \frac{2}{\omega_H^2 \tau} - \frac{2}{\omega_H^2 T_d} - \frac{1}{\omega_H x} - T_2$ $G_0 = \frac{\tau}{T_d}$	$\frac{1}{\tau \omega_H} - \frac{2}{T_d \omega_H} - \frac{1}{\tau \omega_H} \sqrt{1 - \tau^2 \omega_H^2} <$ $< x < \frac{1}{\tau \omega_H} - \frac{2}{T_d \omega_H} + \frac{1}{\tau \omega_H} \sqrt{1 - \tau^2 \omega_H^2}$ $\frac{2\tau \omega_H - \omega_H T_d (1 + \sqrt{1 - \tau^2 \omega_H^2})}{4 - \frac{4\tau}{T_d} - \tau T_d \omega_H^2} < x <$ $< \frac{2\tau \omega_H - \omega_H T_d (1 - \sqrt{1 - \tau^2 \omega_H^2})}{4 - \frac{4\tau}{T_d} - \tau T_d \omega_H^2}$ $\tau \leq \frac{1}{\omega_H}, \quad G_0 \leq \frac{1}{T_d \omega_H}, \quad \Omega \ll \omega_H$

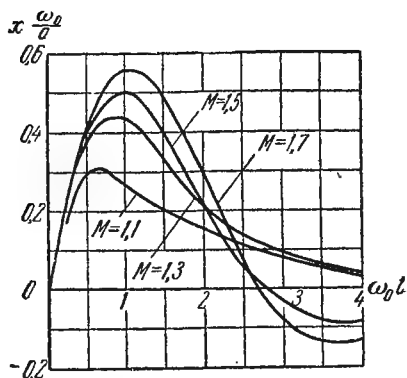


Рис. 363. Ошибка воспроизведения линейного закона для типовых л. а. х. симметричного вида.

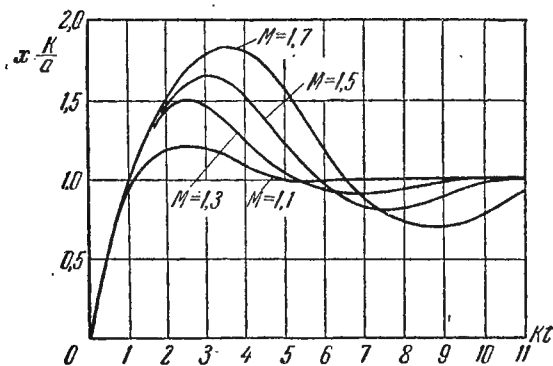


Рис. 364. Ошибка воспроизведения линейного закона для типовых л. а. х. несимметричного вида.

Выбор параметров звена

Таблица П.9

	2,5	5,0	7,5	10	15	20	30	40	50	60	∞
ширина полосы частот, гц	$\pm \frac{f_H}{2,5}$	$\pm \frac{f_H}{5,0}$	$\pm \frac{f_H}{7,5}$	$\pm \frac{f_H}{10}$	$\pm \frac{f_H}{15}$	$\pm \frac{f_H}{20}$	$\pm \frac{f_H}{30}$	$\pm \frac{f_H}{40}$	$\pm \frac{f_H}{50}$	$\pm \frac{f_H}{60}$	резонирует
α	0,758	0,553	0,486	0,453	0,420	0,403	0,386	0,378	0,374	0,370	0,353
G_0	0,226	0,110	0,077	0,052	0,034	0,025	0,016	0,012	0,009	0,008	0

При составлении этой таблицы принято, что $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Коэффициент передачи на несущей частоте G_0 . Сопротивления подсчитываются по формулам

$$R_1 = \frac{\alpha}{\omega_{ce} C},$$

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_0 \alpha C},$$

$$R_3 = \frac{1}{\omega_u C \sqrt{2}}.$$

Несущая частота $\omega_n = 2\pi f_n$.

23. Приведение дифференциальных уравнений к канонической форме

А. Для уравнений нелинейной системы n -го порядка, заданных в нормальной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \dots + a_{1,n-1}\eta_{n-1} + b_1\xi, \\ \dot{\eta}_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \dots + a_{2,n-1}\eta_{n-1} + b_2\xi, \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n-1} &= a_{n-1,1}\eta_1 + a_{n-1,2}\eta_2 + \dots + a_{n-1,n-1}\eta_{n-1} + b_{n-1}\xi, \\ \sigma &= c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-1}\eta_{n-1} - r\xi, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (\Pi.1)$$

каноническая форма записи имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + f(\sigma), \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + f(\sigma), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= \lambda_{n-1} x_{n-1} + f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1} - r f(\sigma), \quad (x_n \equiv \sigma), \end{aligned} \right\} \quad (\Pi.2)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \sigma \equiv x_n$ — канонические переменные.

а) вычислить определитель

(Π.3)

 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1};$

в) вычислить коэффициенты β_i по формулам

$$(II.4)$$

Выражения $N_k(\lambda)$ получаются из определителя $D(\lambda)$ (П.3) заменой k -го столбца на столбец

(17.5)

Выражение $D'(\lambda)$ представляет собой производную от $D(\lambda)$ по λ .

Б. Для уравнений нелинейной системы n -го порядка, заданных в нормальной форме

(II.6)

канонические уравнения относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимают вид

$$(II.7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена $D(\lambda)$.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

4. Если в уравнении $D(\lambda) = 0$ имеется нулевой корень, например $\lambda_1 = 0$, то канонические уравнения для системы уравнений (П.6)

[illegible]

$$r = -(c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n), \quad (\Pi.9)$$

где

$$\beta_k = -\lambda_k \gamma_k \beta = -\lambda_k \sum_{l=1}^n c_l \frac{N_l(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (\Pi.10)$$

В формуле (П.10)

$$N_k(\lambda) = \sum_{l=1}^n b_l D_{lk}(\lambda), \quad (\text{II.11})$$

где $D_{ik}(\lambda)$ обозначает алгебранческое дополнение элемента i -й строки и k -го столбца определителя $D(\lambda)$.

В. Для уравнений нелинейной системы n -го порядка, заданных в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta^{(n-1)} + a_1 \eta^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \eta &= -d\xi, \\ \sigma &= c_0 \eta + c_1 \dot{\eta} + c_2 \ddot{\eta} + \dots + c_{n-2} \eta^{(n-2)} - r\xi, \\ \xi &= f(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (\Pi.12)$$

канонические уравнения записываются в виде

[illegible]

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ — корни многочлена

$$D(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + a_2 \lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1}, \quad (\text{II.14})$$

$$\beta_k = -d \frac{\Delta(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (\text{II.15})$$

В формуле (П.15)

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\lambda) &= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_{n-2}\lambda^{n-2}, \\ D'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} D(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

Если в многочлене (П.14) имеется один нулевой корень, например, $\lambda_{n-1} = 0$, то в выражении (П.13)

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= -d \frac{\Delta(\lambda_k)}{\lambda_k D'_1(\lambda_k)} & (k=1, 2, \dots, n-2), \\ \beta_{n-1} &= -d \frac{c_0}{a_{n-2}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17})$$

где

$$D_1(\lambda) = \lambda^{n-2} + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

24. Достаточные условия устойчивости нелинейных систем второго, третьего и четвертого порядков

Считаем, что нелинейная система содержит одно нелинейное звено, статическая характеристика которого имеет любую форму, но она обязательно однозначная, нечетная и симметричная относительно начала координат.

Производная от функции Ляпунова будет знакоопределенной для систем третьего порядка, уравнения которых приводятся к канонической форме (П.2), (П.8) или (П.13);

для систем четвертого порядка, уравнения которых приводятся к той же форме (П.2) или (П.13), но при наличии одного нулевого корня в уравнении $D(\lambda) = 0$;

для систем четвертого порядка с уравнениями типа (П.2), (П.8) или (П.13) без нулевого корня, но при условии, что одному из вещественных корней уравнения $D(\lambda) = 0$ соответствует отрицательная постоянная β ;

при выполнении условий

$$\Gamma > 0 \quad \text{при} \quad \vartheta > -\frac{r}{4}, \quad (\text{П.18})$$

$$\Gamma > 2\sqrt{-\vartheta} - \sqrt{2} \quad \text{при} \quad \vartheta < -\frac{r}{4}, \quad (\text{П.19})$$

где

$$\Gamma^2 = \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} + r, \quad (\text{П.20})$$

$$\vartheta = \frac{r(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{4\lambda_1\lambda_2}. \quad (\text{П.21})$$

Для систем второго порядка, уравнения которых приводятся к форме (П.7), справедливы условия (П.18) и (П.19) при $r = 0$, если в формулах (П.20) и (П.21) заменить β_1 и β_2 на γ_1 и γ_2 .

25. Переход от л. а. х. вида $20 \lg |1 + W(j\omega)|$ к л. а. х. вида $20 \lg |W(j\omega)|$ (рис. 365, 366, 367)

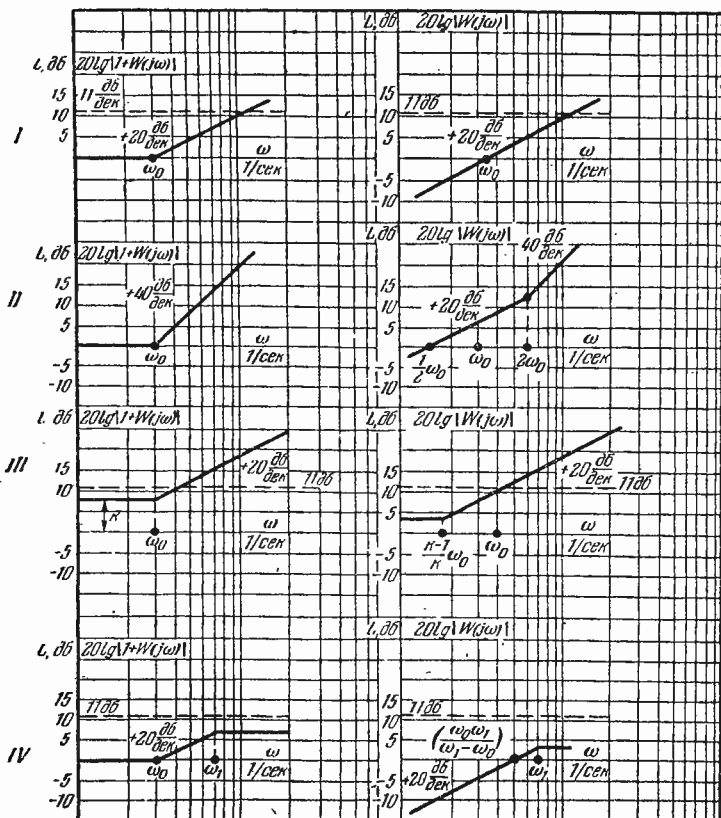


Рис. 365.

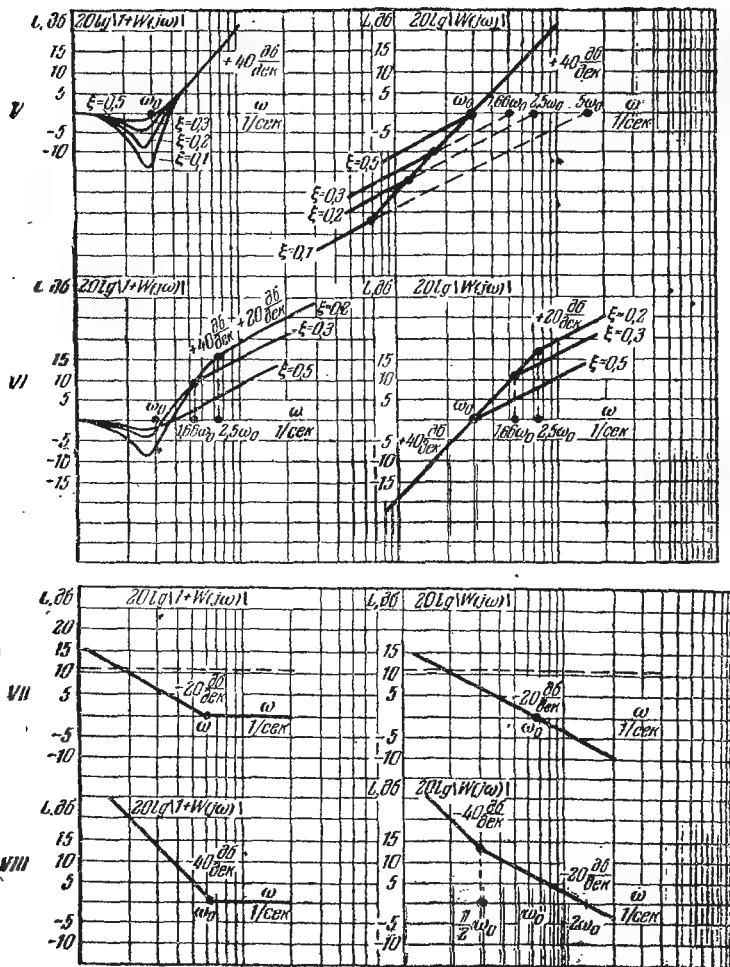


Рис. 366.

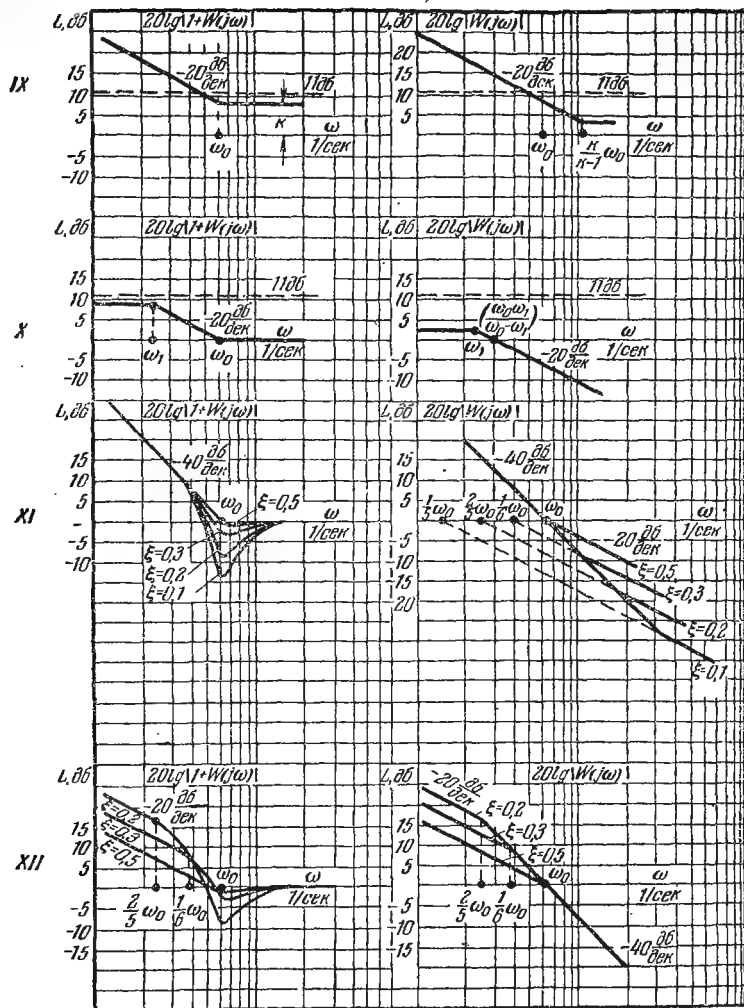
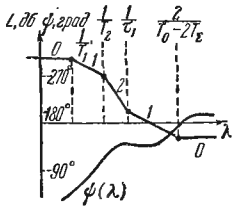
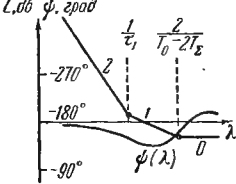
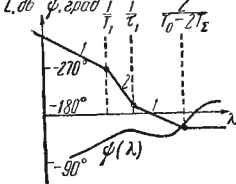


Рис. 367.

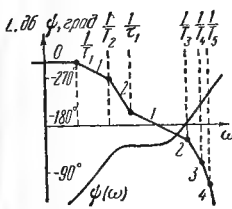
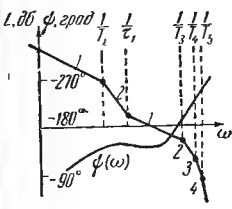
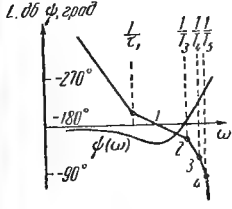
26. Типовые л. а. х. систем с ЦВМ

Степень астатизма	Типовые л. а. х.	Дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы
0		$\frac{K(1+j\lambda\tau_1)\left(1-j\lambda\frac{T_0}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T_0}{2}-T_E\right)\right]}{(1+j\lambda T_1)(1+j\lambda T_2)\left(1+j\lambda\frac{T_0}{2}\right)}$
1		$\frac{K_{\Omega}(1+j\lambda\tau_1)\left(1-j\lambda\frac{T_0}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T_0}{2}-T_E\right)\right]}{j\lambda(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T_0}{2}\right)}$
2		$\frac{K_E(1+j\lambda\tau_1)\left(1-j\lambda\frac{T_0}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T_0}{2}-T_E\right)\right]}{(j\lambda)^2\left(1+j\lambda\frac{T_0}{2}\right)}$

Выбор λ_E или λ_C производится в соответствии с требованиями, предъявляе

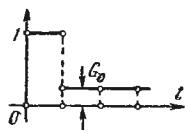
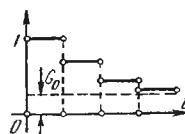
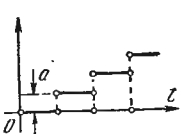
при учете квантования по времени

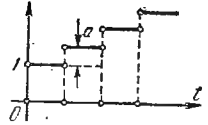
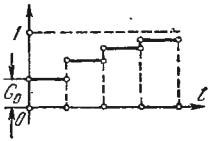
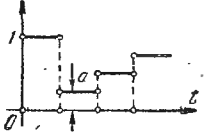
Таблица П. 10

Л. а. х. непрерывной части системы	Передаточная функция непрерывной части системы	Расчетные соотношения
	$\frac{K(1+\tau_1 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)\dots(1+T_l p)\dots}$	$T_\Sigma = \sum_{i=3}^n T_i = T_3 + T_4 + \dots + T_n$ $\tau_1 \geq \frac{1}{\lambda_\Sigma} \sqrt{\frac{M}{M-1}}$ или $\tau_1 \geq \frac{1}{\lambda_\Sigma} \cdot \frac{M}{M-1}$
	$\frac{K_\Omega(1+\tau_1 p)}{p(1+T_2 p)(1+T_3 p)\dots(1+T_l p)\dots}$	$\frac{T_0}{2} + \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\lambda_\Sigma} \cdot \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}$
	$\frac{K_\Sigma(1+\tau_1 p)}{p^2(1+T_3 p)\dots(1+T_l p)\dots}$	или $\frac{T_0}{2} + \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\lambda_\Sigma} \cdot \frac{M}{M+1}$ $\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}$

мыми к точности или быстродействию системы с ЦВМ.

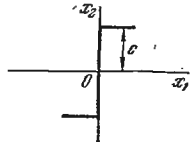
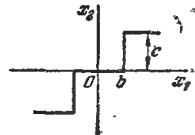
Таблица П.11

№ п.п.	Наименование звена	Передаточная функция непре- рывного аналога $W(p)$	Дискретная передаточная функция $D(z)$	Частотная передаточная функция	Переходная характеристика
1	Дифферен- цирующее	$1 + Tp$	$\frac{z-a}{z}$ $0 < a \leq 1$	$G_0 \frac{1 + j\tau\lambda}{1 + j\frac{T_0}{2}\lambda}$ $G_0 = (1-a), \tau = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T_0}{2}$	
2	Аналог пассивного дифферен- цирующего	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$ $G_0 = \frac{T_2}{T_1},$ $T_1 > T_2$	$\frac{z-a}{z-b}$ $0 < a < 1,$ $0 < b < 1, a > b$	$G_0 \cdot \frac{1 + j\tau_1\lambda}{1 + j\tau_2\lambda}, G_0 = \frac{1-a}{1-b},$ $\tau_1 = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T_0}{2}, \tau_2 = \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{T_0}{2}$	
3	Интегри- рующее	$\frac{k}{p} = \frac{1}{Tp}$	$\frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T_0} \cdot \frac{1 - j\frac{T_0}{2}\lambda}{j\lambda}$	

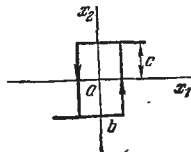
4	Изодромное	$1 + \frac{1}{T_p} = \frac{1+T_p}{T_p}$	$1 + \frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T_0} \cdot \frac{1+j\tau\lambda}{j\lambda}$ $\tau = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right) T_0$	
5	Аналог пассивного интегрирующего	$\frac{1+T_2p}{1+T_1p}$ $T_1 > T_2$	$\frac{(1+a)z+1-a}{(1+b)z+1-b}$ $a > 1, b > 1,$ $a < b$	$\frac{1+j\tau_2\lambda}{1+j\tau_1\lambda}, G_0 = \frac{T_0+2\tau_2}{T_0+2\tau_1},$ $\tau_1 = \frac{bT_0}{2}, \tau_2 = \frac{aT_0}{2}$	
6	Интегро-дифференцирующее	$1 + \frac{1}{T_p} + \tau p$	$\frac{az}{z-1} + \frac{z-1}{z}$ $a < 1$	$\frac{a + jaT_0\lambda + \left(1 + \frac{a}{4}\right) T_0^2 (j\lambda)^2}{jT_0\lambda \left(1 + j \frac{T_0}{2} \lambda\right)}$	

1. В таблице использована псевдочастота $\lambda = \frac{2}{T_0} \lg \frac{\omega T_0}{2} = -j \frac{2\omega}{T_0} = -j \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}$.

2. Переходные характеристики построены для дискретного фильтра с запоминанием на период повторения.

№ п.п.	Статические характеристики нелинейного звена	$q(a)$	$q'(a)$
1	<i>Идеальная релейная</i> 	$\frac{4c}{\pi a}$	0
2	<i>Релейная с зоной нечувствительности</i> 	$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ при $a \geq b$	0

3

Релейная с гистерезисной петлей

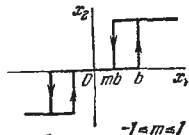
$$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

при $a \geq b$

$$-\frac{4cb}{\pi a^2}$$

при $a \geq b$

4

Релейная общего вида

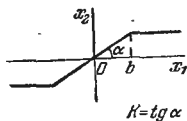
$$\frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right)$$

при $a \geq b$

$$-\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m)$$

при $a \geq b$

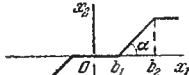
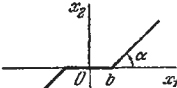
5

С насыщением

$$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$$

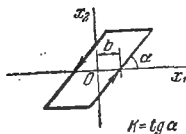
при $a \geq b$

0

№ п.п.	Статистические характеристики нелинейного звена	$q(a)$	$q'(a)$
6	С зоной нечувствительности и насыщением  $K = \operatorname{tg} \alpha$	$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a^2}} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right) \\ \text{при } a \geq b_2.$	0
7	С зоной нечувствительности без насыщения  $K = \operatorname{tg} \alpha$	$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \\ \text{при } a \geq b.$	0

8

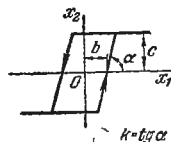
Типа люфта или зазора



$$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{a} \right)} \right] \\ \text{при } a \geq b$$

$$- \frac{4k}{\pi a} \left(1 - \frac{b}{a} \right) \\ \text{при } a \geq b$$

9

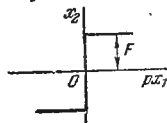
С насыщением
и гистерезисной петлей

$$\frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{c + kb}{ka} + \arcsin \frac{c - kb}{ka} + \right. \\ \left. + \frac{c + kb}{ka} \sqrt{1 - \frac{(c + kb)^2}{k^2 a^2}} + \right. \\ \left. + \frac{c - kb}{ka} \sqrt{1 - \frac{(c - kb)^2}{k^2 a^2}} \right] \\ \text{при } a \geq \frac{c + kb}{k}$$

$$- \frac{bc}{\pi a^2} \\ \text{при } a \geq \frac{c + kb}{k}$$

10

Сухого трения



$$\frac{4F}{\pi v}$$

 v — амплитуда скорости

0

29. Нормированные амплитудно-фазовые частотные характеристики релейных исполнительных механизмов

Релейный исполнительный механизм, состоящий из реле и двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 368, а), рассматривается как одно нелинейное звено автоматической системы.

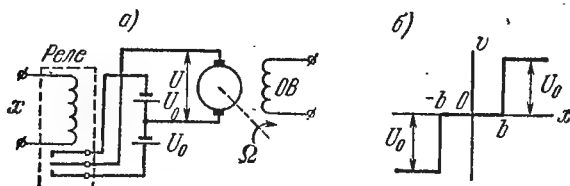


Рис. 368. Релейный исполнительный механизм.

Статическая характеристика реле изображена на рис. 368, б. Гармонически линеаризованная нормированная передаточная функция релейного исполнительного механизма

$$W_0(d, jz) = q_0(d, z) + jq'_0(d, z),$$

где $d = \frac{u}{b}$ — относительная амплитуда, $z = \omega T_m$ — относительная частота, T_m — электромеханическая постоянная времени двигателя.

Нормированные амплитудно-фазовые характеристики построены на рис. 369 и 370 для различных значений коэффициента γ , учитывающего влияние статического момента нагрузки M_H

$$\gamma = 1 - \frac{M_H}{M_0},$$

где M_0 — пусковой момент двигателя.

На рис. 369 пунктиром показаны нормированные амплитудно-фазовые характеристики, полученные в результате перемножения нормированной гармонически линеаризованной передаточной функции реле (см. приложение 28)

$$W_H(d, jz) = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}$$

и нормированной амплитудно-фазовой характеристики двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

$$W_d(jz) = \frac{1}{1 + jz}.$$

Сравнение этих характеристик показывает, что при небольших значениях относительной амплитуды ($d < 10$) раздельное рассмотрение реле и двигателя является недопустимым.

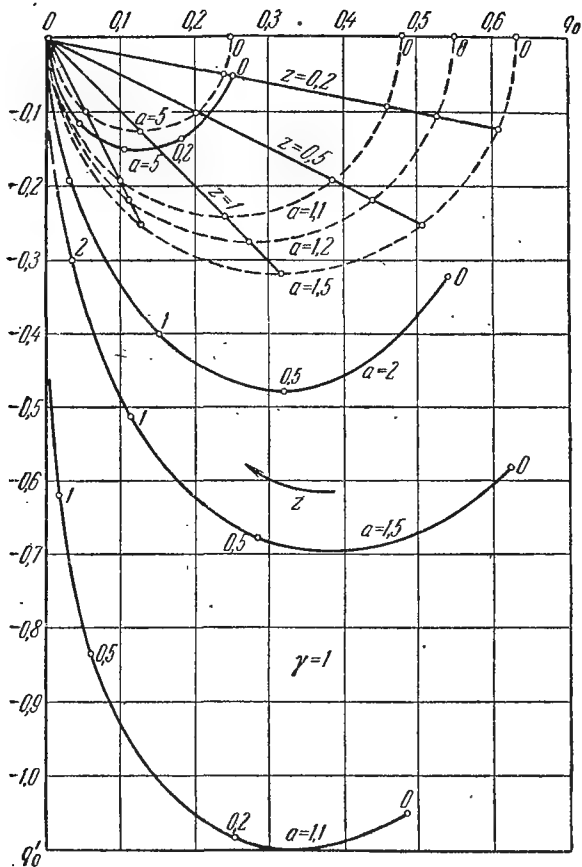


Рис. 369. Нормированные а. ф. х. для случая $M_n = 0$.

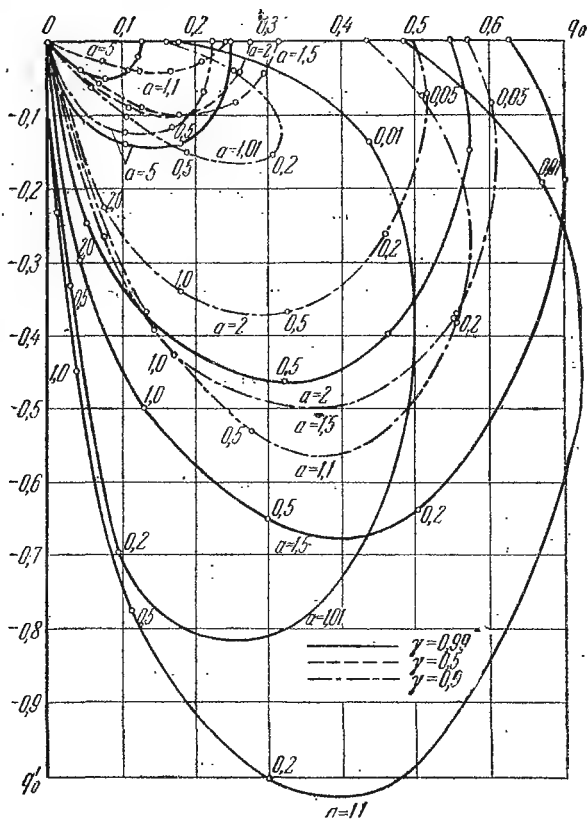


Рис. 370. Нормированные а. ф. х. для случая $M_H \neq 0$.

30. Коэффициенты статистической линеаризации некоторых типовых нелинейностей

Если на вход нелинейного звена со статической характеристикой $y = F(x)$ действует сигнал, представляющий собой случайный процесс

$$x(t) = m_x(t) + x^0(t),$$

где $m_x(t)$ — его математическое ожидание, $x^0(t)$ — случайная центрированная составляющая, то процесс на выходе нелинейного звена приближенно может быть представлен в виде

$$y(t) \approx k_0 m_x(t) + k_\sigma x^0(t).$$

При заданной одномерной плотности вероятности $w(x)$ коэффициенты статистической линеаризации k_0 и k_σ вычисляются по формулам

$$k_0 = \frac{m_y}{m_x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(m_x + x^0) w(x) dx + F(m_x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} x w(x) dx},$$

$$k_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(m_x + x^0) w(x) dx - m_y^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x) dx} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k_2 = \frac{R_{xy}(0)}{R_x(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(m_x + x^0) x w(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x) dx},$$

$$k_\sigma = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Ниже приводятся значения этих коэффициентов и их графики для некоторых типовых нелинейностей при действии нормально-распределенного входного сигнала, имеющего нормированную плотность вероятности

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

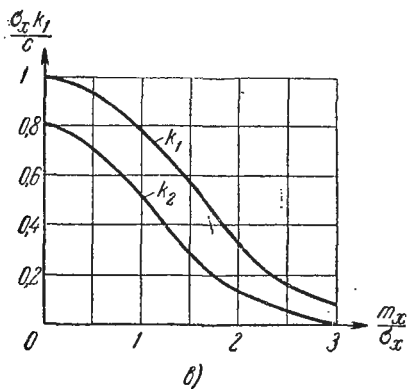
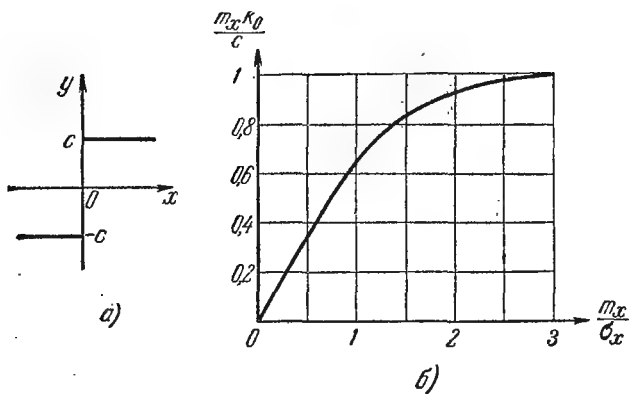


Рис. 371. Графики для идеальной релейной характеристики.

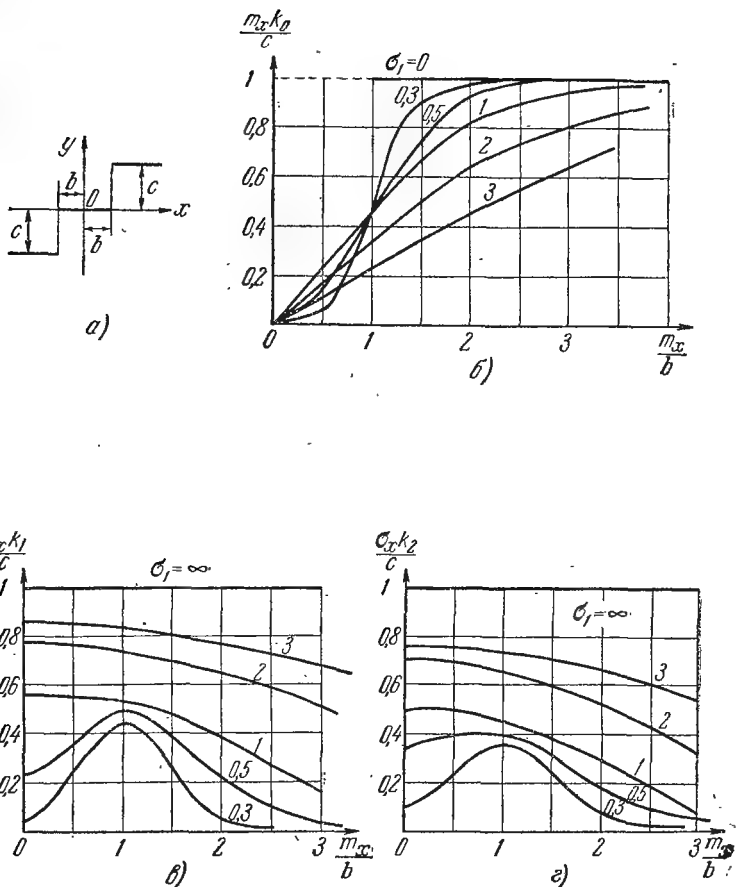


Рис. 372. Графики для однозначной релейной характеристики с зоной нечувствительности.

и интеграл вероятности

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\left(z = \frac{x}{\sigma_x}\right).$$

1) Идеальная релейная характеристика (рис. 371, а)

$$k_0 = \frac{c}{m_x} 2\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right), \quad (\text{П.22})$$

$$k_1 = \frac{c}{\sigma_x} \left[1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)\right]^{1/2}, \quad (\text{П.23})$$

$$k_2 = \frac{c}{\sigma_x} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}. \quad (\text{П.24})$$

Графики коэффициентов приведены на рис. 371, б, в.

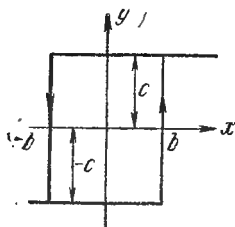


Рис. 373.

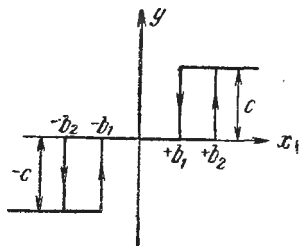


Рис. 374.

2) Однозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 372, а):

$$k_0 = \frac{c}{m_x} \left[\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right], \quad (\text{П.25})$$

$$k_1 = \frac{c}{\sigma_x} \left\{ 1 - \frac{k_0^2 m_x^2}{c^2} - \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right\}^{1/2}, \quad (\text{П.26})$$

$$k_2 = \frac{c}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right], \quad (\text{П.27})$$

$$m_1 = \frac{m_x}{b}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}. \quad (\text{П.28})$$

Графики коэффициентов приведены на рис. 372, б, в, г.

3) Релейная характеристика с гистерезисом (рис. 373)

Коэффициенты k_0 и k_2 определяются соответственно формулами (П.25) и (П.27)

$$k_1 = \frac{c}{\sigma_x} \left[1 - \frac{k_0^2 m_x^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad (\text{П.29})$$

4) Неоднозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 374)

$$k_0 = \frac{c}{2m_x} \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{v+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{v-m_1}{\sigma_1} \right) \right], \quad (\text{П.30})$$

$$k_1 = \frac{c}{\sigma_x} \left\{ 1 - \frac{k_0^2 m_x^2}{c^2} - \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{v+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{v-m_1}{\sigma_1} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (\text{П.31})$$

$$k_2 = \frac{c}{\sigma_x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \times \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right], \quad (\text{П.32})$$

$$v = \frac{b_1}{b_2} < 1.$$

5) Линейная характеристика с насыщением (рис. 375, а)

$$k_0 = \frac{c}{m_x} \left\{ (1+m_1) \Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - (1-m_1) \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}, \quad (\text{П.33})$$

$$k_1 = \frac{c}{\sigma_x} \left\{ 1 - \frac{k_0^2 m_x^2}{c^2} + (m_1^2 + \sigma_1^2 - 1) \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right] - \frac{\sigma_1 (1-m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - \frac{\sigma_1 (1+m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right\}^{1/2}, \quad (\text{П.34})$$

$$k_2 = \frac{c}{\sigma_x} \sigma_1 \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right]. \quad (\text{П.35})$$

Графики коэффициентов представлены на рис. 375, б, в, г.

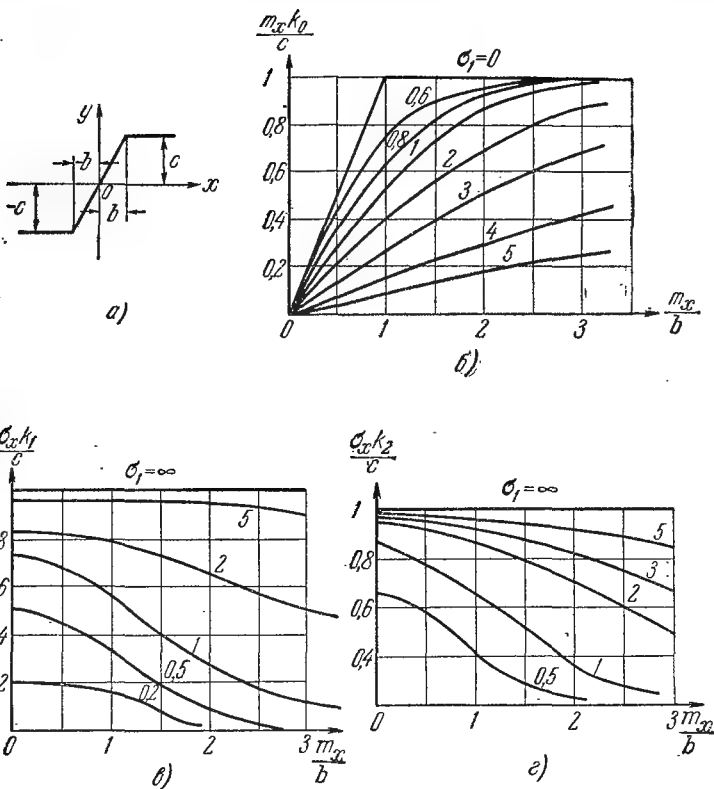


Рис. 375. Графики для линейной характеристики с насыщением.

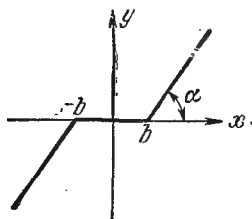


Рис. 376.

6) *Линейная характеристика с зоной нечувствительности*
(рис. 376)

$$k_0 = l \left\{ 1 - \frac{1}{m_1} \left[(1 + m_1) \Phi \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - (1 - m_1) \Phi \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_1}{m_1 \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}, \quad (\text{П.35})$$

$$k_1 = l \left\{ 1 + \frac{m_1^2 + 1}{\sigma_1^2} - \frac{k_0^2 m_1^2}{l^2 \sigma^2} - \left[1 + \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \Phi \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - \right. \\ \left. - \left[1 + \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \Phi \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) - \frac{1 + m_1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1 - m_1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right\}^{1/2}, \quad (\text{П.37})$$

$$k_2 = l \left[1 - \Phi \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right], \quad (\text{П.38})$$

$$l = \operatorname{tg} \alpha.$$

31. Нормированный интеграл плотности вероятности нормального закона распределения

$$\text{Значения функции } \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Т а б л и ц а П.13

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,000	0,66	0,245	1,32	0,407	1,98	0,476
0,02	0,008	0,68	0,252	1,34	0,410	2,00	0,477
0,04	0,016	0,70	0,258	1,36	0,413	2,04	0,479
0,06	0,024	0,72	0,264	1,38	0,416	2,08	0,481
0,08	0,032	0,74	0,270	1,40	0,419	2,12	0,483

Продолжение табл. П.13

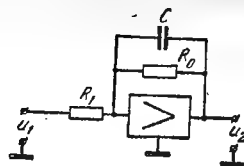
u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$u(\Phi)$	u	$\Phi(u)$
0,10	0,040	0,76	0,276	1,42	0,422	2,16	0,485
0,12	0,048	0,78	0,282	1,44	0,425	2,20	0,486
0,14	0,056	0,80	0,288	1,46	0,428	2,24	0,488
0,16	0,064	0,82	0,294	1,48	0,431	2,28	0,489
0,18	0,071	0,84	0,300	1,50	0,433	2,32	0,490
0,20	0,079	0,86	0,305	1,52	0,436	2,36	0,491
0,22	0,087	0,88	0,311	1,54	0,438	2,40	0,492
0,24	0,095	0,90	0,316	1,56	0,441	2,44	0,493
0,26	0,103	0,92	0,321	1,58	0,443	2,48	0,493
0,28	0,110	0,94	0,326	1,60	0,445	2,52	0,494
0,30	0,118	0,96	0,332	1,62	0,447	2,56	0,495
0,32	0,126	0,98	0,337	1,64	0,450	2,60	0,495
0,34	0,133	1,00	0,341	1,66	0,452	2,64	0,496
0,36	0,141	1,02	0,346	1,68	0,454	2,68	0,496
0,38	0,148	1,04	0,351	1,70	0,455	2,72	0,497
0,40	0,155	1,06	0,355	1,72	0,457	2,76	0,497
0,42	0,163	1,08	0,360	1,74	0,459	2,80	0,497
0,44	0,170	1,10	0,364	1,76	0,461	2,84	0,498
0,46	0,177	1,12	0,369	1,78	0,463	2,88	0,498
0,48	0,184	1,14	0,373	1,80	0,464	2,92	0,498
0,50	0,192	1,16	0,377	1,82	0,466	2,96	0,499
0,52	0,199	1,18	0,381	1,84	0,467	3,00	0,499
0,54	0,205	1,20	0,385	1,86	0,469	3,20	0,4993
0,56	0,212	1,22	0,389	1,88	0,470	3,40	0,4997
0,58	0,219	1,24	0,393	1,90	0,471	3,60	0,49984

[illegible]

Таблица П.15

№ п.п.	Название элемента	Модель элемента	Передаточная функция или уравнение элемента
1	Сумматор		$u_{n+1} = -R_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \dot{u}_i$
2	Инвертор		$u_2 = -\frac{R_0}{R_1} u_1 = -u_1, \quad R_0 = R_1$
3	Безынерционное звено		$u_2 = -k u_1, \quad k = \frac{R_0}{R_1}$

4 Аperiodическое звено первого порядка



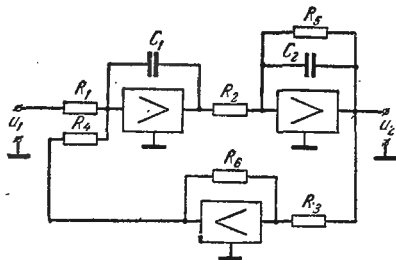
См. также рис. 343

$$k = -\frac{R_0}{R_1},$$

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

$$T = R_0 C$$

5 Аperiodическое звено второго порядка

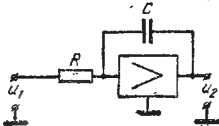


См. также рис. 345

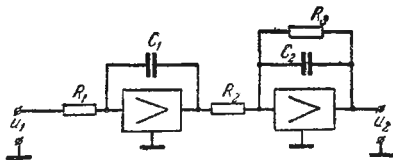
$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

$$k = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_6}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{R_4 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_6}},$$

$$T_1 = \frac{R_4 R_2 R_3 C_1}{R_5 R_6}, \quad T_1 > 2T_2.$$

№ п. п.	Название элемента	Модель элемента	Передаточная функция или уравнение элемента
6	Колебательное звено	Схема совпадает со схемой набора апериодического звена второго порядка (позиция 5). См. также рис. 344, 345	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1},$ $k = \frac{R_4 R_3}{R_1 R_6}, \quad T = \sqrt{\frac{R_4 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_6}},$ $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_4 R_2 R_3 C_1}{R_5^2 R_6 C_2}}, \quad \xi < 1.$
7	Консервативное звено		$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1},$ $k = \frac{R_4 R_3}{R_1 R_6}, \quad T = \sqrt{\frac{R_4 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_6}},$ $R_5 = \infty \text{ (отключено)}, \quad \xi = 0.$
8	Идеальное интегрирующее звено (интегратор)		$W(p) = \frac{k}{p}, \quad k = -\frac{1}{RC}.$

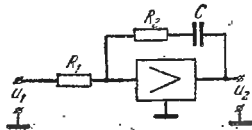
9. Инерционное интегрирующее звено



$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)},$$

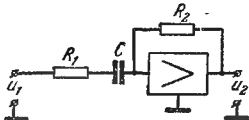
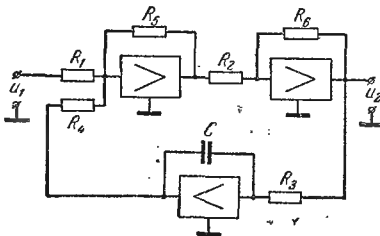
$$k = \frac{R_3}{C_1 R_1 R_2}, \quad T = R_3 C_2$$

10. Изодромное звено

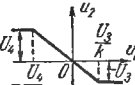
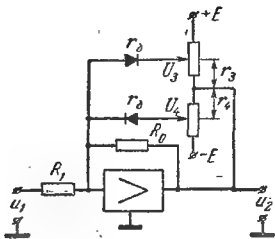
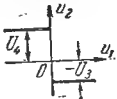


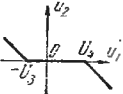
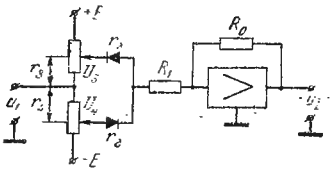
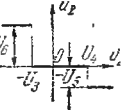
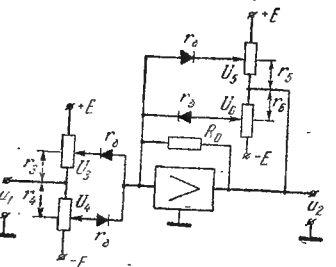
$$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1 + Tp)}{p},$$

$$k_1 = -\frac{R_2}{R_1}, \quad k = -\frac{1}{R_1 C}, \quad T = R_2 C$$

№ п.п.	Название элемента	Модель элемента	Передаточная функция или уравнение элемента	
11	Инерционное дифференцирующее звено		$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$	$k = R_2 C,$ $T = (R_1 + R_2) C$
				$k = \frac{R_4 R_3 C}{R_1},$ $T = \frac{R_4 R_2 R_3 C}{R_5 R_6}$

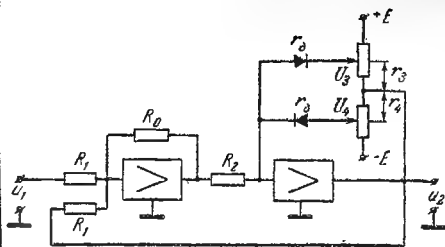
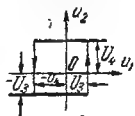
Примечание. Аперидическое звено второго порядка можно получить с помощью двух последовательно соединенных моделей аперидического звена первого порядка.

№ п. п.	Статическая характеристика	Схема, моделирующая статическую характеристику	Уравнение или аналитическая запись статической характеристики
1	Линейная с ограничением или насыщением 		$u_2 = \begin{cases} -ku_1, & 0 \leq u_1 \leq \frac{U_3}{k}, \\ -U_3 & \text{при } u_1 \geq \frac{U_3}{k}, \\ ku_1, & -\frac{U_4}{k} \leq u_1 \leq 0, \\ U_4 & \text{при } u_1 \leq -\frac{U_4}{k}, \end{cases}$ $k = \frac{R_0}{R_1} \quad \text{при } r_{\text{добр}} = \infty; r_{\text{дпр}}, r_3 \text{ и } r_4 \ll R_1.$
2	Идеальная релейная 		$u_2 = \begin{cases} -U_3 & \text{при } u_1 > 0, \\ U_4 & \text{при } u_1 < 0. \end{cases}$ $R_0 = \infty, r_{\text{добр}} = \infty; r_{\text{дпр}}, r_3 \text{ и } r_4 \ll R_1$

№ п. п.	Статическая характеристика	Схема, моделирующая статическую характеристику	Уравнение или аналитическая запись статической характеристики
3	Линейная с зоной нечувствительности 		$u_2 = \begin{cases} -k(u_1 - U_4) & \text{при } u_1 \geq U_4, \\ k(u_1 + U_3) & \text{при } u_1 \leq -U_3, \\ 0, & -U_3 < u_1 < U_4. \end{cases}$ $k = \frac{R_0}{R_1} \quad \text{при } r_{\text{добр}} = \infty; r_{\text{дпр}}, r_3 \text{ и } r_4 \ll R_1.$
4	Релейная с зоной нечувствительности 		$u_2 = \begin{cases} -U_5 & \text{при } u_1 \geq U_4, \\ U_6 & \text{при } u_1 \leq -U_3, \\ 0, & -U_3 < u_1 < U_4. \end{cases}$ $r_{\text{добр}} = \infty; r_{\text{дпр}} \approx 0, \\ r_3, r_4, r_5 \text{ и } r_6 \ll R_0.$

5

Релейная
с гистерезис-
ной петлей

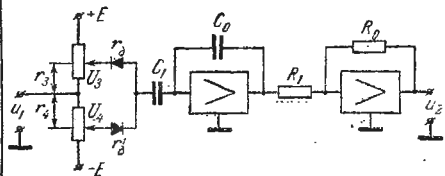
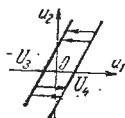


$$u_2 = \begin{cases} -U_3 & \text{при } u_1 - U_3 < 0, \\ U_4 & \text{при } u_1 - U_3 > 0, \end{cases} \quad \text{при } \frac{du_1}{dt} > 0,$$

$$u_2 = \begin{cases} U_4 & \text{при } u_1 + U_4 > 0, \\ -U_3 & \text{при } u_1 + U_4 < 0 \end{cases} \quad \text{при } \frac{du_1}{dt} < 0$$

6

Люфт или
зазор



$$u_2 = \begin{cases} k(u_1 - U_4) & \text{при } \frac{du_1}{dt} > 0, \\ k(u_1 + U_3) & \text{при } \frac{du_1}{dt} < 0, \\ \text{const} & \text{при } -U_4 \leq \frac{u_2}{k} - u_1 \leq U_3 \end{cases}$$

$$k = \frac{c_1 R_0}{c_0 R_1}$$

35. Таблица

α	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,158	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,580	0,603	0,617	0,646
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,733	0,761	0,786	0,810
2,5	0,674	0,705	0,739	0,771	0,802	0,833	0,861	0,891	0,916	0,943
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038
3,5	0,814	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,107	1,124
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097
6,0	0,904	0,943	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,942	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,025	1,017	1,005	0,989
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989
12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988

функций $h(t_0)$

Таблица П.17

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
0,967	0,985	1,010	1,031	1,042	1,060	1,078	1,098	1,113	1,125	1,133
1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
1,138	1,134	1,134	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,966	0,949	0,934	0,922	0,914	0,906
1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061
0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958
0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949
0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955
0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970

t_0	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,001
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	1,000
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,997	1,004	1,007	1,003	0,999
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996

Продолжение табл. П.17

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
1,011	1,008	1,001	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979
1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,969	0,967
0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

1. Анисимов В. И., Вавилов А. А., Фатеев А. В., Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1959.
2. Бесекерский В. А., Попов Е. П., Теория систем автоматического регулирования, «Наука», 1966.
3. Бесекерский В. А., Востоков С. Б., Цейтлин Я. М., Электромеханические сглаживающие устройства, «Судостроение», 1964.
4. Бесекерский В. А., Орлов В. П., Полонская Л. В., Федоров С. М., Проектирование следящих систем малой мощности, Судпромгиз, 1958.
5. Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А., Динамический синтез систем гироскопической стабилизации, «Судостроение», 1968.
6. Васильев Д. В., Митрофанов Б. А. и др., Проектирование и расчет следящих систем, «Судостроение», 1964.
7. Васильев Д. В., Чуич В. Г., Системы автоматического управления, «Высшая школа», 1967.
8. Воронов А. А., Основы теории автоматического управления, части 1 и 2, «Энергия», 1966.
9. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ГИИЛ, 1953.
10. Егоров К. В., Основы теории автоматического регулирования, «Энергия», 1967.
11. Ивахненко А. Г., Техническая кибернетика, ГИТЛ УССР, 1959.
12. Казаков И. Е., Доступов Б. Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1962.
13. Казамаров А. А., Палатник А. Т., Роднянский Л. О., Динамика двумерных систем автоматического регулирования «Наука», 1967.
14. Коган Б. Я., Электронные моделирующие устройства, Физматгиз, 1963.
15. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматики и технической кибернетики, ГЭИ, 1961.
16. Кузин Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления, Машгиз, 1962.
17. Кузовков Н. Т., Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах, Оборонгиз, 1960.
18. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, 1955.
19. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

20. Павлов А. А., Синтез релейных систем оптимальных по быстродействию, «Наука», 1966.
21. Первозванский А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, 1962.
22. Под ред. Петрова Б. Н., Автоматическая оптимизация управляемых систем, ИЛ, 1960.
23. Попов Е. П., Динамика систем автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1954.
24. Попов Е. П., Автоматическое регулирование и управление, Физматгиз, 1962.
25. Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
26. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1960.
27. Пупков К. А., Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления, «Машиностроение», 1965.
28. Скворцов С. В., Синтез корректирующих устройств судовых следящих систем, «Судостроение», 1968.
29. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз, 1962.
30. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.
31. Солодовников В. В., Топчеев Ю. И., Крутикова Г. В., Частотный метод построения переходных процессов с применением таблиц и номограмм, Гостехиздат, 1955.
32. Под ред. Солодовникова В. В., Техническая кибернетика, книги 1 и 2, Теория автоматического регулирования, «Машиностроение», 1967.
33. Траксел Дж. Дж., Синтез систем автоматического регулирования, Машгиз, 1959.
34. Под ред. Траксела Дж. Дж., Справочная книга по технике автоматического регулирования, ГЭИ, 1962.
35. Ту Ю. Т., Цифровые и импульсные системы автоматического управления, «Машиностроение», 1964.
36. Фатеев А. В., Основы линейной теории автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1954.
37. Фельдбаум А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1959.
38. Федоров С. М., Литвинов А. П., Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами, «Энергия», 1965.
39. Хлыпало Е. И., Нелинейные системы автоматического регулирования, «Энергия», 1967.
40. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.
41. Цянь Сюэ-сень, Техническая кибернетика, ИЛ, 1956.
42. Честнат Г., Майер Р., Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования, части 1 и 2, ГЭИ, 1959.
43. Шаталов А. С., Структурные методы в теории управления и электроавтоматике, Госэнергоиздат, 1962.